Niveau(x) d'enseignement: 4 Numéro EDUQ : 0870126
Centre d'intérêt: 041

Mathématique, option II : plan de cours : les fonctions trigonométriques / Ministère de l'éducation, Direction générale des programmes, Direction générale des régions. -- [Québec] : Le Ministère, 1986.
325 p. en pag. multiple : ill. ; 28 cm. -- (Matériel de soutien à l'implantation des programmes du secondaire)

Titre de la couv. Code: 16-3304-04 ; 0687-416.

Vedette(s)-secondaire(s): Québec (Province) Ministère de l'éducation. Direction générale des programmes * Québec (Province) Ministère de l'éducation. Direction générale des régions

Descripteur(s): Mathématiques * Plan de cours * Activité d'apprentissage * Exercice * Matériel didactique * Secondaire (Ordre d'enseignement)

Identificateur(s) de sujet: Trigonométrie

Dans le cadre de l'implantation du programme d'études d'option II en mathématiques au secondaire, certains conseillers pédagogiques se sont réunis afin de produire des documents de soutien à l'intention des enseignants. Le document contient du matériel de soutien pour l'enseignement des fonctions trigonométriques. Il est divisé en deux grandes sections. La section I est elle-même divisée en deux parties: le Document A fait l'historique de la trigonométrie tandis que le Document B traite de la construction des tables. La seconde section contient des activités d'apprentissage et des exercices; elle est divisée en neuf blocs qui correspondent à autant d'objectifs intermédiaires.

Type de document: d

EDUQ 8870126

Gouvernement du Québec
Ministère
de l'Éducation
Direction générale des programmes
Direction générale des régions

16-3304-04

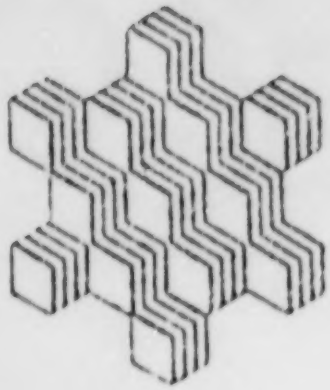
MATÉRIEL DE SOUTIEN À L'IMPLANTATION DES PROGRAMMES DU SECONDAIRE

MATHÉMATIQUE

OPTION II

PLAN DE COURS

LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES



OCTOBRE 1986

Québec

020400

458 6003

EDUQ 8870126

AVANT-PROPOS

Dans le cadre de l'implantation du programme d'études d'option II (064-534 et 064-531) en mathématique au secondaire, certains conseillers pédagogiques se sont réunis afin de produire des documents de soutien à l'intention des enseignants.

Voici la liste des documents qui ont été rédigés.

NUMERO	TITRE	AUTEUR
16-3304-02	Les coniques	Paul Patenaude
16-3304-03	Les fonctions polynômiales	André Davidson René Parenteau Jean-Luc Bombardier
16-3304-04	Les fonctions trigonométriques	Denis De Champlain Pierre Mathieu
16-3304-05	La géométrie	Pierre Mathieu

Le contenu de ces documents n'engage que les auteurs. Tout organisme scolaire qui le souhaite est autorisé à reproduire ces documents à condition d'en préciser la source.

SECTION 1

INTRODUCTION

La trigonométrie, probablement beaucoup plus que n'importe quelle autre branche des mathématiques, est née d'un constant et fertile jeu de l'offre et de la demande.

> «Je te donne à manger; tu aimes cela; tu en redemandes et même beaucoup plus et du meilleur!»
>
> «L'offre de théories et de techniques mathématiques applicables n'importe quand et les demandes incessantes d'une science appliquée en plein développement et en plein essort, l'astronomie!»

Au début, cette interaction et ces liens entre la théorie et la pratique eurent également lieu entre l'analyse numérique et la géométrie. L'utilisation de variables pour désigner certaines opérations s'appliquant à des classes spécifiques d'objets joua un rôle essentiel dans le développement de la trigonométrie, même si le symbolisme utilisé aujourd'hui et portant l'empreinte de l'algèbre, ne fut pas introduit avant le 16e siècle.

Les débuts du développement de la trigonométrie se perdent dans la préhistoire. La première relation utilisait diverses séquences numériques, qui liaient la longueur des ombres d'un bâton avec l'heure du jour; ce fut l'époque d'Hipparque. La trigonométrie était basée sur une simple fonction, soit la corde correspondant à un arc circulaire de longueur arbitraire.

Ces premiers développements furent en général effectués par des Grecs au 2ème siècle de notre ère. Par la suite, le centre de ce développement se déplaça aux Indes (où le concept de corde évolua vers diverses variétés de sinus), et ensuite dans l'Asie Centrale.

Du 9e au 15e siècle, la nouvelle fonction «sinus» et l'ancienne fonction reliée à l'ombre du gnomon (tangente, cotangente, sécante) furent élaborées et compilées en système sexagésimal. De ces développements émergea la trigonométrie moderne, ou du moins ses principes de base.

En même temps que se déplaçait le centre de l'activité astronomique vers l'Europe, il en fut de même de la trigonométrie. La compilation, et le calcul des tables, ainsi que la découverte des différentes relations fonctionnelles entre les divers éléments d'un triangle, se poursuivit en Europe. Une des plus importantes contributions de l'Europe fut le remplacement de règles verbales par les symboles appropriés. Mais l'invention du calcul infinitésimal permit d'élever la trigonométrie au rang de «branche croissante des mathématiques».

A la fin du 18e siècle, Léonard Euler avait symbolisé et classé tous les théorèmes et les corollaires de cette théorie complexe des fonctions trigonométriques. Par la suite, à l'école, spécialement utile aux navigateurs et aux arpenteurs, la trigonométrie possédait sa propre identité.

Le développement accéléré de la trigonométrie est un exemple frappant du fait que les connaissances tendent à s'accumuler au même rythme que celles que l'on possède déjà; en somme, sa croissance est exponentielle en fonction du temps.

De telles généralisations sont valables et même très utiles, mais il faut être très prudent et peser le pour et le contre, car on y rencontre parfois des incongruences dues à une interprétation personnelle des faits historiques. En fait, l'historien raconte une histoire!.

Il débite des histoires dont les longueurs sont souvent truffées de conjonctures fort incertaines, à partir d'un fait bien occasionnel. Plus tard, et plus près de notre ère, on peut percevoir des histoires plus courtes et remplies de faits beaucoup plus précis et certains; vraiment, l'abondance des textes historiques constitue souvent une grande difficulté, car la plupart des faits ne peuvent pas être utilisés. Ainsi, ce qui en résulte (de pertinent) donne une impression de simplicité, de continuité et de rationnalisme, ce qui la plupart du temps est parfaitement illusoire. Ceux qui racontent les faits n'en connaissent pas toutes les dimensions et la complexité de ces faits nous oblige à douter des textes qui nous sont parvenus.

Par exemple:

> «Si on pense à ceux qui ont établi les bases de la trigonométrie, ils n'auraient pu rien faire si leurs prédécesseurs n'avaient pas défriché le terrain et établi la toile de fond sans laquelle ils n'auraient pu rien faire. De plus, la connaissance d'un sujet donné n'est pas instantanée. Elle progresse lentement et souvent par une suite désordonnée de sauts dans le temps. Des pas importants sont parfois franchis en peu de temps; des découvertes importantes disparaissent parfois sans laisser de trace, pour finalement être redécouvertes plus tard, et parfois beaucoup plus tard!» (volume II, HISTORY OF MATHEMATICS, David Eugène Smith).

Trois catégories de personnes furent historiquement confrontées à des situations qui, sous plusieurs aspects, sont fortement analogues:

a) La première catégorie est celle de L'INVENTEUR original d'un théorème ou d'une technique quelconque; il solutionne ses problèmes à l'aide des outils mathématiques dont il a hérité (de ses prédécesseurs), mais lentement ou très subitement, il découvre des solutions plus puissantes pour ces vieux problèmes ou il pose de nouveaux problèmes et de nouveaux défis.

b) La seconde catégorie est celle de l'HISTORIEN qui cherche, recherche, s'emmêle, s'empêtre de lui-même, pour retracer, à travers les textes et les productions des inventeurs, la pensée et le cheminement poursuivi par l'inventeur.

c) La troisième catégorie est celle de l'ÉLÈVE, pour lequel un problème donné est aussi nouveau que s'il était celui qui le regardait pour la première fois.

Les personnes impliquées dans chacune de ces trois catégories partagent, à des degrés divers, l'habileté à imposer à l'histoire leurs propres recherches et leurs propres découvertes.

En fait, l'historien et l'élève peuvent gagner beaucoup à comprendre ce que l'inventeur a réalisé.

SECTION 1

DOCUMENT A

Historique

UN POINT DE VUE HISTORIQUE

Si on utilise le mot «trigonométrie» pour désigner la science étudiée actuellement sous ce nom, on peut alors situer son origine au 17e siècle, soit après le développement accéléré d'une algèbre symbolique satisfaisante.

Si on utilise le mot «trigonométrie» pour désigner cet appendice géométrique de l'astronomie, utilisant certaines fonctions d'angles, on peut situer son origine à l'époque d'Hipparque (-140), même si on a pu trouver des traces beaucoup plus anciennes de son utilisation.

Si on utilise le mot «trigonométrie» pour parler strictement et littéralement de mesures d'angles, on pourra alors situer son origine beaucoup plus loin encore, soit entre les années -2000 et -1000.

Il est important de situer cette science en fonction de son origine la plus reculée, tout en insistant sur l'idée de fonction d'angle.

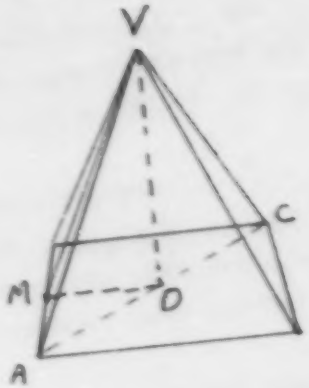
EN EGYPTE

On a découvert dans le papyrus AHMES (-1550) la description de cinq problèmes relatifs aux diverses mesures des pyramides. Quatre d'entre eux font référence

DIRECTION DES COMMUNICATIONS

au concent de SEQT d'un angle. Ahmes ne fut pas très précis en ce qui a trait à la signification exacte de cette expression, mais les experts croient que le seqt de la pyramide illustrée ci-dessous était équivalent à la cotangente de l'angle OMV. Les pyramides égyptiennes étaient construites de façon que l'angle OMV soit approximativement égal à 52 degrés.

Certains auteurs croient que le mot «SEQT» était équivalent au mot «rapport».



A BABYLONE

Contrairement aux croyances populaires, il semble que les Babyloniens connaissaient les travaux faits par les Egyptiens sur la trigonométrie. En réalité,

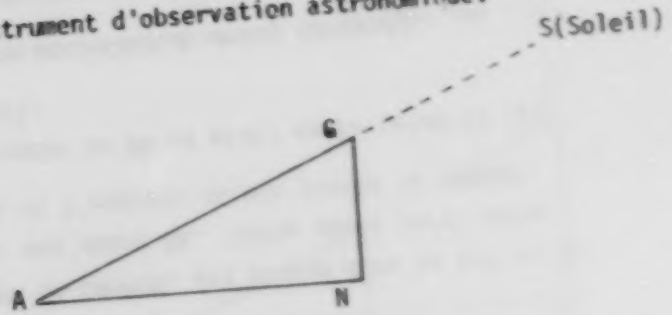
les Babyloniens se sont surtout intéressés à l'astronomie. Le calendrier astrologique du roi Sargon (-2800) et une table des éclipses de la lune (-747) en sont d'excellents exemples. Les travaux des Babyloniens ne furent aucunement axés sur la trigonométrie, mais ces travaux utilisèrent parfois certaines mesures d'angles.

LE GNOMON

Hérodote (-450) racontait que les Grecs avaient construit leur cadran solaire en se basant sur celui des Babyloniens. Cela est sûrement vrai, car les Egyptiens utilisaient déjà le principe du cadran solaire en l'an -1500 et on sait que les Babyloniens avaient obtenu cette connaissance des Egyptiens.

Quelle relation existe-t-il entre le cadran solaire et la trigonométrie?

En fait, le cadran solaire est un instrument d'observation astronomique.



Un bâton GN, que les Grecs appelèrent un GNOMON, est planté dans le sol et on peut, par temps ensoleillé, observer une ombre AN. Cette ombre varie selon l'heure du jour, le temps de l'année et l'endroit où est planté le GNOMON.

Comme le gnomon est constant, la longueur de AN (à midi) varie selon la valeur de l'angle A (soit la cotangente).

(Aucun texte n'indique le nom que l'on accordait à un tel concept).

EN CHINE

Dans le Chou-peï Suan king (-1105), on utilisait fréquemment le triangle rectangle pour mesurer des distances, des hauteurs et des profondeurs; et il est plus que probable que les rapports des côtés étaient fort connus.

On y a raconté que «la connaissance vient de l'ombre et l'ombre vient du gnomon»; ainsi une trigonométrie plane primitive était donc connue en Chine au deuxième millénaire avant la naissance du Christ.

Encore là, il n'est pas évident que les Chinois utilisaient des noms précis pour certaines fonctions d'angles. Cependant, les intérêts astronomiques des Chinois, comme beaucoup d'autres peuples anciens, exigeaient la mesure de différents angles.

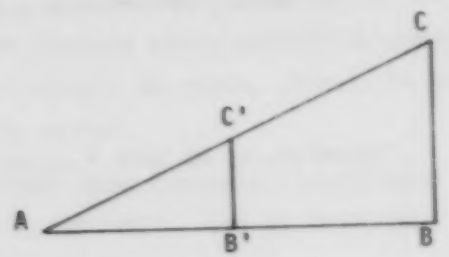
EN GRECE

Quand THALES mesura la hauteur des pyramides au moyen de son ombre, il utilisa ce que l'on peut maintenant appeler «le coup de l'ombre» ou bien «l'estimation par la mesure de l'ombre» (The shadow reckoning).

Dans son «Banquet des sept sages», Plutarque, parlant de Nilax, l'un de ses personnages, s'adresse à Thales et il lui dit: «Non seulement il vous honore, mais il vous admire pour vos remarquables travaux et particulièrement pour cette invention par laquelle, avec peu d'efforts et sans l'aide d'instruments mathématiques, vous avez trouvé avec autant de précision la hauteur des pyramides. Vous plantez votre gnomon (bâton) à l'extrémité de l'ombre de la pyramide et se trouvent ainsi construits deux triangles formés par les rayons du soleil; vous avez alors montré que le rapport d'une ombre sur l'autre est égal au rapport de la hauteur de la pyramide sur la hauteur du gnomon».

Essentiellement, cette mesure des hauteurs suppose que l'on possède les connaissances suivantes:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}$$



Pour nous, du 20e siècle, cela nous suggère qu'il s'agit de la tangente, soit:

$$\tan A = \frac{BC}{AB}$$

mais il n'est pas évident qu'il en fût ainsi à l'époque de Thales.

Nous savons maintenant que, plusieurs siècles plus tard, AB fût appelé l'umbra recta (ombre de droite), et c'est ainsi que la relation (ou le rapport) de AB sur BC fût appelé «le coup de l'ombre» (ou l'estimation par la mesure de l'ombre).

On a écrit qu'Anaximandre (-575) érigea, près de Spartes, le premier gnomon érigé en Grèce. Ce fût probablement un obélisque planté perpendiculairement à la surface du sol de la planète. Cet obélisque servit d'abord à déterminer la ligne des méridiens; mais surtout, comme ce fût le cas en Egypte et à Babylone, cela servit à mesurer la longueur de l'année, des saisons et du jour, en plus de donner l'heure du jour.

ARISTARQUE DE SAMOS

Le pas suivant le plus important dans le développement de la trigonométrie fût réalisé par l'astronome Aristarque de Samos (-260). Il essaya de calculer les distances terre-lune et terre-soleil, ainsi que le diamètre de chacun. Ses raisonnements d'ordre géométrique furent très exacts, mais ses instruments

de mesure étaient si imparfaits qu'il obtint des mesures peu précises; il affirma que le rapport de la distance terre-lune à la distance terre-soleil était situé entre 1/18 et 1/20. Dans les calculs de sa preuve, il utilisa des rapports qui suggèrent l'idée de tangente d'un angle.

HIPPARQUE

Théon d'Alexandrie affirme qu'Hipparque, le plus grand des astronomes grecs, écrivit 12 livres sur le calcul des mesures des cordes correspondant à divers angles, mais il n'existe plus aucune trace de ces livres. Dans un écrit qui est parvenu jusqu'à nous, Hipparque affirme lui-même qu'il est à effectuer de tels calculs; on peut alors dire qu'Hipparque fût le père de la trigonométrie. C'EST LE GRAND DEBUT. Les formules de $\sin(A \pm B)$ et $\cos(A \pm B)$ étaient connues de lui.

On sait aussi qu'à cette époque, et même avant, pour résoudre un triangle, on l'inscrivait d'abord dans un cercle. Les côtés étaient alors considérés comme des cordes et étaient calculés en fonction des valeurs du rayon. Ainsi, la table des cordes devint un instrument d'une haute valeur.

On sait aussi qu'Hipparque résolvait des problèmes dans lesquels il utilisait un équivalent de la formule $\tan b = \cos A \cdot \tan c$, où $C=90°$. Lui et Ptolémée

DIRECTION DES COMMUNICATIONS

connaissaient la relation que l'on exprime aujourd'hui par $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

HERON D'ALEXANDRIE

Héron démontra beaucoup d'ingéniosité dans ses calculs sur le triangle et, en Egypte, il était très familier avec l'art de l'arpentage. On ne peut cependant pas dire qu'il comprenait et qu'il appréciait l'art de la trigonométrie. Il utilisa diverses règles qui servaient à calculer l'aire de polygones réguliers, et ce en l'exprimant dans chaque cas par le produit du carré d'un côté par un certain nombre; ces règles étaient en quelque sorte les précurseurs ou les ancêtres des fonctions trigonométriques.

A_n est l'aire d'un polygone régulier à n côtés et S_n est la mesure du côté:

$$A_3 = \frac{13}{30} S_3^2 \qquad A_8 = \frac{29}{6} S_8^2$$

$$A_4 = S_4^2 \qquad A_9 = \frac{51}{8} S_9^2$$

$$A_5 = \frac{5}{3} S_5^2 \qquad A_{10} = \frac{15}{2} S_{10}^2$$

$$A_6 = \frac{13}{5} S_6^2 \qquad A_{11} = \frac{45}{4} S_{11}^2$$

$$A_7 = \frac{43}{12} S_7^2$$

Comme $A_n = \frac{1}{4} n \cdot S_n^2 \cdot \cot \frac{180°}{n}$, on peut supposer qu'Héron connaissait le concept de $\cot \frac{180°}{n}$; cependant, rien ne confirme, dans ses coefficients, une telle connaissance.

PTOLEMÉE

Les contributions personnelles de Ptolémée à l'évolution de la trigonométrie sont très minimes, et ce s'il y en a. Cependant, nous lui sommes fort redevables de son sommaire, dans l'Almagest, des différents théorèmes connus d'Hipparque. Comme beaucoup d'autres auteurs grecs, il utilisa le concept de cordes d'angles au lieu de sinus; cependant, l'idée de sinus était bien installée dans son esprit. Il continua la rédaction de la table des cordes commencée par Hipparque; il semble que ses calculs furent la source principale des tables de sinus utilisées par d'anciens auteurs Hindus.

LA TRIGONOMETRIE HINDU

Même si les Hindus avaient produit le Surya Siddhanta et même si ce travail traitait d'astronomie ancienne,

> «Ce travail donnait d'ailleurs une table des demi-cordes, apparamment basée sur les travaux de Ptolémée, et montrait des signes évidents de connaissance des fonctions trigonométriques».

il fallût attendre à l'époque d'Aryabhata, qui écrivit son Aryabhatiyam, pour voir émerger dans la littérature orientale un traité purement mathématique contenant des traces précises de fonctions d'angles. Dans ces travaux, on y parle de demi-cordes, comme le Surya Siddhanta l'avait fait auparavant.

En fait, les Hindus se contentèrent de continuer à construire des tables.

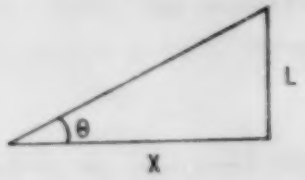
LA TRIGONOMÉTRIE ARABE ET PERSE

Comme leurs prédécesseurs, les Arabes et les Perses étaient intéressés par la trigonométrie à cause de son utilité dans la résolution de problèmes relatifs à l'astronomie. Le plus grand astronome arabe fut Albategnius qui fut à juste titre considéré comme le Ptolémée de Bagdad. Comme les Hindus, il utilisa des demi-cordes au lieu de cordes. Il découvrit également une formule permettant de calculer l'altitude du soleil, soit la formule:

$$x = \frac{L \cdot \sin (90° - \theta)}{\sin \theta}$$

Cette formule est équivalente à:

$$x = L \cdot \cot \theta$$



Abû'l-Wefâ calcula les différentes valeurs inscrites dans les tables avec un soin beaucoup plus grand que ses prédécesseurs et il organisa systématiquement les théorèmes et les différentes preuves existant en trigonométrie.

Puis ce fut l'époque de Nasîr ed-dîn Al-TÛsî, un astronome Perse, qui écrivit le premier traité de trigonométrie dans lequel la trigonométrie apparaissait comme une véritable science.

Par la suite, Ulugh Beg de Samarkand (un astronome célèbre) fit calculer et compiler des tables de sinus et de tangente qui contribuèrent grandement à l'avancement de cette science.

EN ESPAGNE

Avec le déclin de Bagdad, l'étude de la trigonométrie prit beaucoup d'importance en Espagne. Les plus importants travaux furent effectués par les astronomes Ibn Al-Zarqâla et Jabir ibu Aflah qui construisirent une autre série de tables. Au 13e siècle, Alfonso X dirigea des travaux de construction de tables à Toledo; il s'agit d'un assortissement de tables qui furent longtemps utilisées par les astronomes, notamment au 14e et au 15e siècle.

PEURBACH ET REGIOMONTANUS

Au 14e siècle, les Anglais connaissaient les travaux des Arabes en trigonométrie. Au 15e siècle, Peurbach et son élève Regiomontanus compilèrent une

nouvelle table des sinus. Le travail de Regiomontanus, en particulier, contribua à l'identification de la trigonométrie comme une science indépendante de l'astronomie.

Il compila lui-même de nouvelles tables et nombreux sont ceux qui disent de lui qu'il aurait établi les bases réelles qui contribuèrent à de nombreux travaux sur la trigonométrie plane.

L'INFLUENCE DES LIVRES IMPRIMÉS

Le premier livre imprimé sur la trigonométrie portait le nom de «Tabula Directionum» et il fut rédigé par Regiomontanus; il fut publié à Nürnberg en 1485. Le premier livre dans lequel les six fonctions trigonométriques étaient définies comme étant des fonctions d'angle au lieu d'un arc (et souvent sous forme de rapport), fut le «Canon Doctrinae Triangulorum» rédigé par Rhaeticus et publié à Leipzig en 1551; et ce même s'il n'accordait aucun nom précis aux fonctions telles que sin θ, cos θ et csc θ, sauf les noms de perpendiculum, basis et hypotenusa. Rhaeticus fut le premier à adopter un arrangement semi-quadrantal des tables, en donnant les fonctions de 0° à 45° et en utilisant par la suite les co-fonctions. Il exprima sin nθ en termes de sin θ, sin (n-1)θ et cos (n-2)θ, un sujet élaboré par la suite par Jacques Bernouilli (1702).

VIETE ET PITISCUS

Viète anporta une grande contribution dans le traitement analytique de la trigonométrie. C'est avec lui que débuta le développement systématique du calcul dans les triangles à l'aide des six fonctions trigonométriques.

Pitiscus publia en 1595 un important traité de trigonométrie dans lequel il corrigea les tables de Rhaeticus, tout en modernisant le traitement de ce sujet. C'était la première fois qu'un livre portait le titre de Trigonométrie.

EN ANGLETERRE

En 1658, John Newton publia un traité sur la trigonométrie qui, tout en étant largement basé sur les travaux de Gellibrand, était l'ouvrage le plus complet à être publié sur cette question.

Newton et Gellibrand firent preuve d'anticipation en donnant les tables avec des divisions centésimales d'un angle.

John Wallis (1616-1703) contribua au développement de la trigonométrie en traduisant les formules obtenues sous forme d'équations au lieu de s'en tenir à des proportions. Cela permit de faire de grands pas dans le traitement analytique de la trigonométrie.

LA TRIGONOMÉTRIE ANALYTIQUE

Au 17e siècle, à cause des avantages apportés par la création d'un symbolisme algébrique en Europe, la trigonométrie devint une science analytique, et cela lui

permit d'entrer dans le champ des hautes sciences mathématiques.

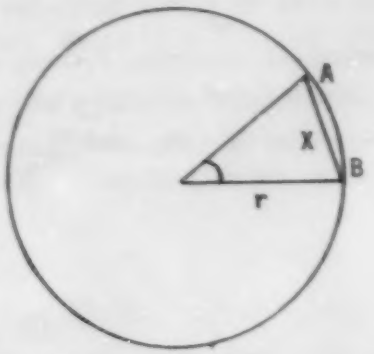
En Orient, la trigonométrie fut tributaire du «coup de l'ombre» (Shadow Recko-ning) jusqu'à ce que les Jésuites apportèrent en Chine les découvertes faites en Europe et ce au début du 17e siècle (1600).

Ceci nous permet de conclure sur le développement initial de cette science; on peut maintenant se permettre de regarder de près les principaux concepts que l'on peut rencontrer en trigonométrie élémentaire.

LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

LE SINUS

La fonction la plus évidente et la plus naturelle pour les premiers astronomes était reliée à la mesure de la corde correspondant à un arc de cercle dont la mesure du rayon était parfaitement arbitraire.



Comme ils ne possédaient pas de notation utile et efficace pour les fractions, il n'était guère commode de prendre un rayon qui causerait des difficultés au niveau des fractions, pour le calcul de longueurs approximatives des différentes cordes. Un rayon commode, comme 60, fut choisi; ainsi la mesure de la corde correspondant à un arc donné, cet arc étant considéré comme une ligne, devint la première fonction étudiée par les astronomes.

La première table des cordes fut compilée par Hipparque (-140), mais cette table s'est perdue et nous ne possédons aucune information sur son degré de précision et sur son étendue. La deuxième table des cordes fut compilée par Ménélaus (100), mais elle fut également perdue; cependant certains de ses travaux sur la trigonométrie sphérique nous confirme l'utilisation d'une telle fonction.

La troisième table des cordes (la plus importante) fut l'oeuvre de Ptolémée(150). Il divisa le cercle en 360 degrés et le diamètre en 120 parties égales; cette décision de 120 parties égales lui fut sans doute suggérée par le fait que le nombre 120 a un grand nombre de facteurs différents, et aussi par le fait que 3 x 120 était égal à 360 (ceci étant dû à l'ancien usage de 3 comme valeur de π).

Influencé autant par Hipparque que par les Babyloniens, il utilisa une subdivision sexagésimale (fractions exprimées en soixantièmes), le rayon étant divisé en 60 moirai (μ) et chaque moira en 60 minutes, et ainsi de suite.

L'ORIGINE DU SINUS

Un premier nom spécial que l'on accorda à cette fonction (que l'on appelle aujourd'hui le sinus) est utilisé dans les travaux d'Aryabhata (510). Même s'il y

parle au début de demi-corde (half-chord), il utilisa par la suite l'abbréviation jya ou jiva qui signifiecorde. Il poursuivit les travaux de Ptolémée en divisant le cercle en 360 degrés, et il composa une table des sinus.

A cause des efforts énormes que les Hindus ont déployé pour construire de telles tables, il est fort probable qu'ils étaient au courant des relations que l'on exprime aujourd'hui par les expressions suivantes:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin^2\theta + \text{versin}^2\theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

etc.

La table des sinus établie par Aryabhata fut reproduite par Brahmagupta en 628; Bhaskara (1150) dans son Siddhanta Siromani décrivit une méthode pour construire une table des sinus, pour chaque degré.

UN NOM POUR LE SINUS

Le nom de jya donné au sinus par Aryabhata est l'équivalent du Kramajya utilisé par Brahmagupta; il s'agit en fait du sinus rectus (sin) par opposition au sinus versus (arc sin). Lorsque ce concept fut introduit en Arabie, il prit le nom de karaja. C'est le même nom qu'utilisa Al-Khowārizmī dans son Sondhind, ainsi que dans les textes produits par l'espagnol ibn Al-Zarqāla (1050).

LE SINUS CHEZ LES LATINS

C'est en 1150 que le mot sinus fut utilisé pour la première fois et ce par Gherardo de Cremone; il utilisa le mot sinus à la place de jaid, dont le sens latin est à peu près l'équivalent, chacun des deux mots signifiant «un repli». Cet usage fut adopté par la majorité des mathématiciens européens. Le mot «corde» fut aussi par la suite utilisé dans le même sens.

En 980, Abū,l-Wefā avait clairement défini le sens des mots corde, sinus et arc sinus. Il avait aussi construit une table des sinus pour chaque 15 minutes.

Un peu plus tard, Ibn Zarqāla compila une table des sinus et des sinus versus, en utilisant un rayon arbitraire de 150 minutes, et aussi, comme Ptolémée, 60 moirai, afin de ne pas confondre les unités de mesure de longueur avec les unités de mesure d'angle.

D'AUTRES NOMS POUR LE SINUS

Le terme «sine» ne fut pas immédiatement universellement reconnu, car Rhaeticus, en 1560, utilisait encore le terme «perpendiculum».

Certains utilisaient aussi les termes «sinus totus» et «sinus perfectus» qui étaient l'équivalent de sin 90°.

DES ABBRÉVIATIONS POUR LE TERME SINUS

Le premier auteur qui utilisa une abbréviation satisfaisante du terme sinus fut Girard en 1626. Il remplaça l'expression «sinus de A» par «A», et l'expression «cosinus de A» par «a».

Cependant, déjà en 1624, Gunter avait utilisé la contraction SIN dans plusieurs de ses dessins, même si l'utilisation de cette abbréviation n'apparaissait pas par la suite dans ses travaux.

A Londres, en 1631, Richard Norwood publia un livre sur la trigonométrie, dans lequel il dit:«dans ces exemples, s signifie sinus, t signifie tangente, sc signifie complément de sinus, tc signifie complément de tangente, sec signifie sécante». Le premier auteur à utiliser le symbole sin pour sinus est le mathématicien français Hérigone en 1634. En 1643, Cavalieri suggéra Si et en 1647, dans un de ses livres, Oughtred utilisa le symbole S.

En 1654, Seth Ward, un professeur d'astronomie de Oxford, lui-même un élève de Oughtred, utilisa s pour sinus et S' pour le «sinus complementi».

Les symboles

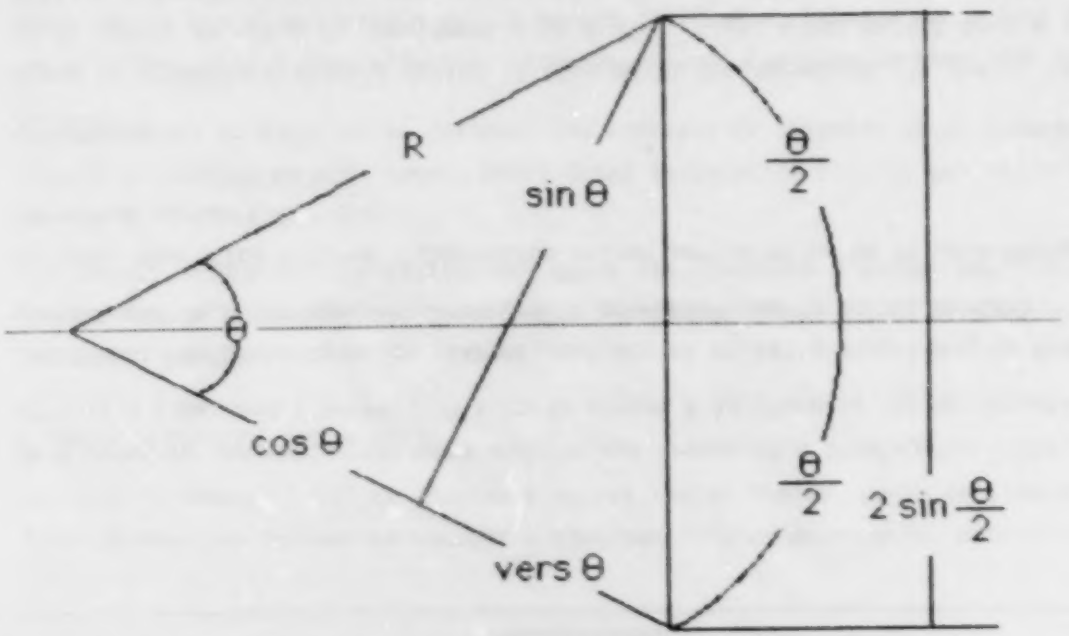
$$\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \text{ etc.}$$

pour arc sin x, arc cos x, etc, furent suggérés par l'astronome anglais Sir John F.W. Herschel en 1813.

LE SINUS VERSUS

La deuxième fonction qui intéressa les astronomes ne fut pas le cosinus, même si cela peut nous sembler étrange, mais ce fut le sinus versus. Cette fonction, que l'on mentionne généralement lorsque l'on parle du sinus, fut signalée pour la première fois dans le Surya Siddhanta(400), puis par la suite dans les écrits d'Aryabhata qui fut le premier à compiler les tables d'une telle fonction:

$$\text{versin}\,\theta = 1 - \cos\theta$$



De l'Inde, ce concept se transmit ensuite aux Arabes et à Albatagnius (920); il utilisait cependant l'expression «chorda versa» à la place de «sinus versus».

Les Arabes parlèrent aussi de «sahem», qui devint en latin «sagitta», un terme utilisé par la suite par Fibonacci (1220) pour désigner le «sinus versus».

En 1558, Maurolico utilisa l'expression «sinus versus major de θ» pour désigner le «sinus versus (180°-θ)».

LE COSINUS

Quand le triangle rectangle devint la base de la trigonométrie, il devint commode de parler de sinus du complément d'un angle. C'est ainsi qu'est apparu le kotijya d'Aryabhata (510), même si le sinus (90°-θ) était fréquemment utilisé.

En 1120, Platon de Tivoli utilisa le terme «chorda résidui» pour parler du complément d'un angle. En 1463, Regiomontanus utilisa l'expression «sinus rectus complementi». En 1551, Rhaeticus utilisait le «basis»; en 1579, Viète parlait de «sinus residuae» et en 1609, Magini utilisa l'expression «sinus secundus».

En 1620, Edmund Gunter suggéra l'expression co.sinus, que John Newton (1658) s'empressa de modifier en «cosinus». Cette abbréviation reçut une appréciation fort généralisée.

En 1643, Cavalieri utilisa le symbole «Si.2» et en 1706, William Jones utilisa le symbole «S».

En 1674, Jonas Moore parla de «Cos.», le symbole généralement adopté par la majorité des auteurs, par la suite.

LA TANGENTE ET LA COTANGENTE

Pendant que les astronomes se préoccupaient de la corde et de sinus et s'évertuaient à développer ces concepts, les mesures les plus utiles et les plus élémentaires de hauteurs et de distances nécessitaient l'utilisation des concepts de tangente et de cotangente (soit le gnomon et l'ombre).

Il est possible qu'Ahmes (-1550) connaissait la tangente, mais peu importe, car nous savons que «l'estimation par la mesure de l'ombre» (shadow reckoning) était un principe utilisé pour effectuer diverses mesures (particulièrement des hauteurs).

Contrairement au sinus et au cosinus, les concepts de tangente et de cotangente furent développés en même temps, étant donné la relation étroite qui reliait le gnomon et l'ombre.

Les Grecs, malgré tout, n'utilisèrent guère ces fonctions d'angle, sauf lorsque Thalès mesura la hauteur des pyramides à l'aide des ombres et de la théorie des triangles semblables.

L'UMBRA RECTA ET L'UMBRA VERSA

Le Surya Siddhanta (400) et plusieurs autres textes Hindus, parle de l'ombre, particulièrement en reliant ce concept à diverses lois en astronomie, mais ce furent

les arabes qui les premiers utilisèrent ce concept comme une fonction.

Ce fut Ahmed ibn Abdallāh, appelé habituellement Habash Al-Hasīb, «le calculateur», qui, en 860, construisit la première table de tangentes et de cotangentes. Les auteurs arabes distinguaient l'ombre rectiligne, traduit en latin par «umbra recta», et l'ombre retournée, traduit en latin par «umbra versa»; cela dépendait de la position du gnomon, placé perpendiculaire au plan horizontal (comme les cadrans solaires), ou perpendiculaire à un mur vertical (comme les cadrans solaires sur un édifice).

Ces termes disparurent vers la fin du 18e siècle.

LES TABLES DES OMBRES

Le premier auteur qui construisit une table des ombres fut Albategnius (920); cette table donnait la valeur de la cotangente pour chaque degré du quadrant.

$\mathcal{M} = L \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ pour $\theta = 1°, 2°, \ldots\ldots$, L étant la longueur du gnomon.

En 980, Abū'l-Wefā construisit une table des tangentes pour chaque 15 minutes. A la même époque, on construisit une table des cotangentes, pour chaque 10 minutes.

Sous la direction de Ulugh Beg (1453), on prépara une table des tangentes pour chaque minute, de 0° à 45°, et pour chaque 5 minutes, de 45° à 90°; la table des cotangentes fut cependant construite pour chaque degré seulement.

NOMS ET SYMBOLES

Même si Rhaeticus (1551) n'utilisa pas les termes Tangente et cotangente, il les définit tout de même comme un rapport et il compila une table fort complète de ces deux fonctions.

Viète appela la tangente, le «sinus foecundarum» (ou le prosinus ou l'amsinus). C'est en 1583 que Thomas Fincke utilisa pour la première fois le terme «tangent» à la place de l'expression «umbra versa». Ce nom fut adopté par Pitiscus en 1595 et, grâce à la réputation de ce grand écrivain, le terme fut accepté par la majorité des auteurs.

En 1609, Magini utilisa l'expression «tangens secunda» pour la cotangente.
En 1620, Edmund Gunter utilisa le terme «cotangens» pour désigner cette fonction.
En 1643, Cavalieri utilisait les symboles «Ta» et «Ta.2».
En 1657, Oughtred utilisa les symboles «t arc» et «t co arc».
En 1683, Sir Charles Scarburgh utilisa les symboles «t». et «ct».
En 1693, Wallis utilisa les symboles «T» et «t».

L'abbréviation «tan» fut utilisée pour la première fois par Girard en 1626 et «cot» fut suggéré par Jonas Moore en 1674; cependant, à cette époque, aucun symbolisme n'était universellement reconnu pour désigner la tangente et la cotangente.

LA SECANTE ET LA COSECANTE

Etant donné que les astronomes et les arpenteurs des temps anciens n'avaient aucun besoin des concepts de sécante et de cosécante, sauf en ce qui concerne l'hypoténuse d'un triangle rectangle, ces fonctions furent développées beaucoup plus

tardivement que les autres.

La sécante fut utilisée, semble-t-il, pour la première fois par Al-Mervazî (860) les deux fonctions apparurent ensuite dans les travaux d'Abû'l Wefâ (980), mais elles ne portaient pas de nom précis.

C'est au 15e siècle, lors de la fabrication des tables pour les navigateurs, que les concepts de sécante et de cosécante prirent forme.

Copernic (1542) connaissait le concept de sécante; il l'appelait d'ailleurs «hypotenusa» et il avait compilé des valeurs associées à ces fonctions. Mais ce fut son élève Rhaeticus qui, le premier, ajouta ces fonctions à ses tables imprimées. La sécante et la cosécante apparurent avec les 4 autres fonctions dans son «canon doctrinae triangulorum» paru à Leipzig en 1551, même si Rhaeticus parle d'hypotenusa pour désigner ces fonctions.

Le nom de cosécante est apparu dans son oeuvre «Opus Palatinum», publié après sa mort, en 1596.

En 1558, Maurolico avait inclus dans ses tables les sécantes de 0° à 45°.

NOMS POUR LA SECANTE ET LA COSECANTE

Le mot sécante fut utilisé pour la première fois par Fincke en 1583 et même si Viète en 1593, utilisait le mot «Transsinuosa», le nom persista et il fut adopté par la majorité des mathématiciens de l'époque.

La cosécante fut d'abord appelée «secans secunda» par Magini (1592) et par Cavalieri (1643).

En 1613, Pitiscus donna les noms de sécante et de cosécante dans ses tables.

En 1643, Cavalieri utilisa les symboles «Se» et «Se.2».
En 1657, Oughtred utilisa les symboles «sec arc» et «sec co arc».
En 1693, Wallis utilisa les symboles «s» et «d».

C'est en 1626, que Girard suggéra le symbole «Sec» qui fut adopté par la majorité.

Même aujourd'hui, il n'y a pas de symbole universel pour la cosécante, car «cosec» et «csc» sont tous les deux utilisés.

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS

Les Grecs savaient que:

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

ou $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(ce qui est déduit de la relation de Pythagore)

Abu,l-Wefâ connaissait les formules suivantes:

$$\frac{\tan\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \frac{\cot\theta}{1} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \sqrt{1 + \tan^2\theta} \quad \text{ou} \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\csc\theta = \sqrt{1 + \cot^2\theta} \quad \text{ou} \quad \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

Rhaeticus savait que:

$$\frac{\sec\theta}{1} = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\csc\theta}{1} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Viète découvrit que:

$$\frac{1}{\sec\theta} = \frac{\cos\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\tan\theta}$$

$$\frac{\csc\theta}{\sec\theta} = \frac{\cot\theta}{1} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\frac{1}{\csc\theta} = \frac{\cos\theta}{\cot\theta} = \frac{\sin\theta}{1}$$

EN EUROPE

Celui qui, le premier, compila des tables en Europe, fut Regiomontanus (1546). En fait, il n'y eut aucun développement original dans les méthodes de calcul depuis l'époque de Ptolémée jusqu'à ce que Fourrier découvrit des méthodes modernes de calcul basées sur les séries (1812).

En général, toutes les anciennes tables furent construites avec un rayon de 60^m défini par Ptolémée; c'est ainsi que le sinus totus, ou sin 90°, etait égal à 60. Ceci était dû au fait qu'il était essentiel d'éviter les fractions, avant que l'on ne découvrit le système décimal.

Le premier qui adopta la forme sin 90° = 1, fut Jobst Bürgi (1600), mais ses tables, compilées sur cette base, ne furent pas très développées.

LES PREMIERES TABLES

En 1533, Apianus publia une table des sinus, dans laquelle le rayon était divisé en décimales;

En 1551, Rhaeticus publia une table des six fonctions basée sur un arrangement semi-quadrantal, calculée pour chaque 10' et ce à une précision de 7 chiffres.

En 1579, Viète publia une extension des tables de Rhaeticus, mais pour chaque minute.

En 1594, Blundeville publia une table des six fonctions.

En 1596, Rhaeticus publia d'autres tables, calculées pour chaque 10'' et ce jusqu'à 10 décimales.

CERTAINS THÉORÈMES BIEN CONNUS

L'ADDITION DES SINUS

Les Grecs savaient que $\sin(\theta \pm \theta') = \text{Sin } \theta \cdot \text{Cos } \theta' \pm \text{Cos } \theta \cdot \text{Sin } \theta'$. Il est probable que Hipparque (140) la connaissait, particulièrement à cause de ses divers travaux sur les cordes. Il était certainement connu de Ptolémée (150), car il porte souvent son nom.

Bhaskara (1150) le signala dans ses écrits.

En 980, AbQ'l-Wefâ le signala sous la forme:

$$\sin(\theta \pm \theta') = \sqrt{\sin^2\theta - \sin^2\theta \cdot \sin^2\theta'} \pm \sqrt{\sin^2\theta' - \sin^2\theta \cdot \sin^2\theta'}$$

LES FONCTIONS DE MULTIPLES D'ANGLES

La formule $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cdot \cos\theta$ est un corollaire du cas général $\sin(\theta + \theta')$.

Elle fut signalée pour la première fois par AbQ'l-Wafâ sous la forme:

$$\text{crd } \theta : \text{crd } \frac{1}{2}\theta = \text{crd}(180° - \frac{1}{2}\theta) : r$$

Viète (1591) fut le premier à démontrer les formules de:

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta \cdot \sin\theta - \sin^3\theta$$
$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\sin^2\theta \cdot \cos\theta$$

Rhaeticus trouva la relation: $\cos n\theta = \cos(n-2)\theta - 2\sin\theta \sin(n-1)\theta$

En 1676, Newton trouva la relation:

$$\sin n\theta = n \sin\theta + \frac{(1+n^2)n}{3!} \sin^3\theta + \ldots$$

FONCTIONS DE LA DEMIE D'UN ANGLE

Ptolémée connaissait le sinus de la demie d'un angle, exprimé sous la forme de la demie d'une corde.

Il est probable qu'Hipparque (140) et il est certain que

Vara-hamihira savait que:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

Euler (1748) découvrit que:

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$\cot 2\theta = \frac{\cot \theta - \tan \theta}{2}$$

Lambert (1765) découvrit que:

$$\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2\theta}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan^2\theta}$$

LE THÉORÈME DES SINUS

L'importante relation $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

était connue de Ptolémée même s'il l'exprimait en termes de cordes.

$$a = \frac{c \cdot \text{cord } 2A}{120}$$

Nasîr ed-dîn (1250) la définit avec clarté.

Finalement, ce fut Regiomontanus (1464) qui lui donna sa véritable forme.

LE THÉORÈME DES COSINUS

Le fait que $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, est essentiellement un fait géométrique découlant du théorème d'Euclide.

Au début, Viète (1593) écrivit que: $\frac{2ab}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{\sin (90°-C)}$

Ensuite, W.Snell(1627) écrivit que: $\frac{2ab}{[c^2-(a-b)^2]} = \frac{1}{(1 - \cos C)}$

LE THÉOREME DES TANGENTES

Le fait que $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tan 1/2(A+B)}{\tan 1/2(A-B)}$ était connu de Ptolémée.

Il fut ensuite démontré par Regiomontanus (1464) et exprimé sous la forme ci-dessus.

LE THÉOREME DE L'AIRE

En 1464, Regiomontanus signala la formule

$$\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C$$

En 1627, Snell la proposa sous la forme suivante:

$$\frac{1}{\sin A} = \frac{bc}{2\Delta}, \text{ d'où } \Delta = \frac{bc.\sin A}{2}$$

SECTION 1

DOCUMENT B

La construction
des tables

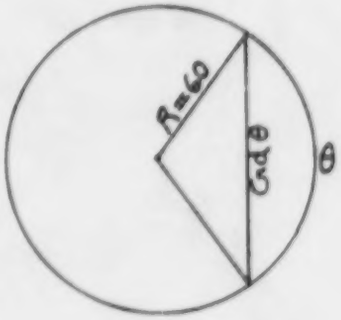
LES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES

Les premières méthodes de calcul

L'outil de base fût d'abord la «fonction de corde», le précurseur du sinus, plutôt que la tangente.

Pour des calculs sérieux, il était nécessaire d'avoir un système de numération valable; au début (-1500), on utilisa le système sexagésimal qui avait été développé en Mésopotamie (actuellement l'Iraq)

A la fin du livre I de l'almagest écrit par Claudius Ptolémée, on trouve une table de la fonction «crd θ» (définie sur la figure ci-dessous), calculée avec une précision de 3 positions sexagésimales pour le domaine défini par
$\theta = 1/2^{\circ}, 1^{\circ}, 1\ 1/2^{\circ}, \ldots, 180^{\circ}$;
il y avait aussi une colonne de différences pour l'interpolation.



Ptolémée (150) expliqua comment il avait compilé sa table:

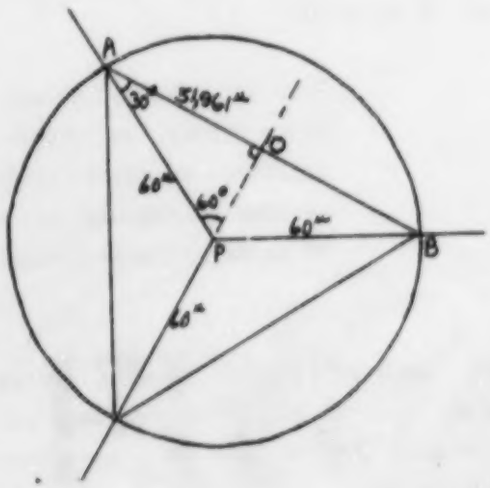
1) A partir des côtés de polygones réguliers à 3,4,5,6 et 10 côtés, inscrits dans un cercle, il obtint les résultats suivants:

crd 120° = $103^{\prime\prime}\ 51'\ 23''$
crd 90° = $84^{\prime\prime}\ 51'\ 10''$
crd 60° = $60^{\prime\prime}$
crd 36° = $37^{\prime\prime}\ 4'\ 55''$
crd 72° = $70^{\prime\prime}\ 32'\ 3''$

Pour les 3 premiers (120°, 90° et 60°), il se servit de la relation de Pythagore.

crd 120° = 103,8563888^{m} = 103^{m} 51' 23''

$\overline{AP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OP}^2$
$3600 = \overline{OA} + 900$
$\overline{OA}^2 = 2700$
$\overline{OA} = 51,961524$



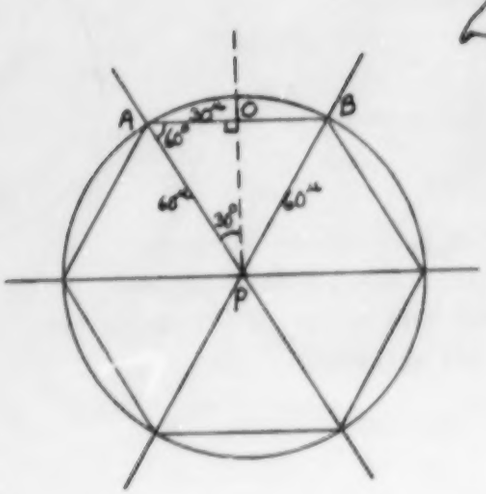
Longueur de la demi-corde

N.B.: $\frac{51,961}{60} = 0,8660166$

Ce qui correspond environ à la valeur de Sin 60°.
Sin 60° = 0,8660254

crd 60° = 60^{m}

$\overline{OA} = 30$, car le côté opposé à un angle de 30° est égal à la moitié de l'hypoténuse



Longueur de la demi-corde

N.B: $\frac{30^{m}}{60} = 0,5$

ce qui correspond exactement à la valeur de Sin 30°
Sin 30° = 0,5

Valeur moderne du rapport d'un côté d'un polygone régulier au rayon du cercle circonscrit	
# de côtés	Rapport
3	1,732050808
4	1,414213562
5	1,175570505
6	1
7	0,867767478
8	0,765366865
9	0,684040285
10	0,618033989

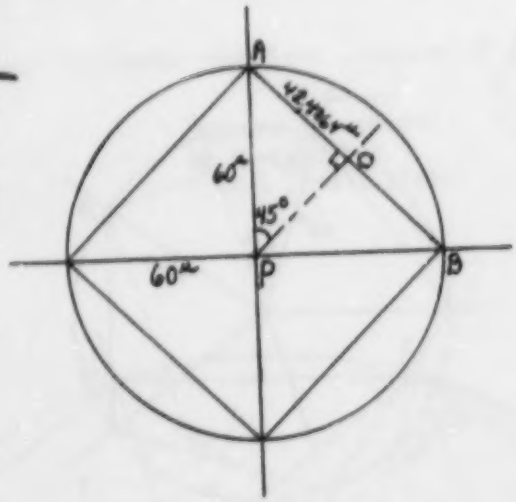
crd 90° = 84,8527777 = 84^m 51' 10''

$\overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{AP}^2$

$2\ \overline{OA}^2 = 60^2$

$\overline{OA}^2 = 1800$

$\overline{OA} = 42,426407$



Longueur de la demi-corde

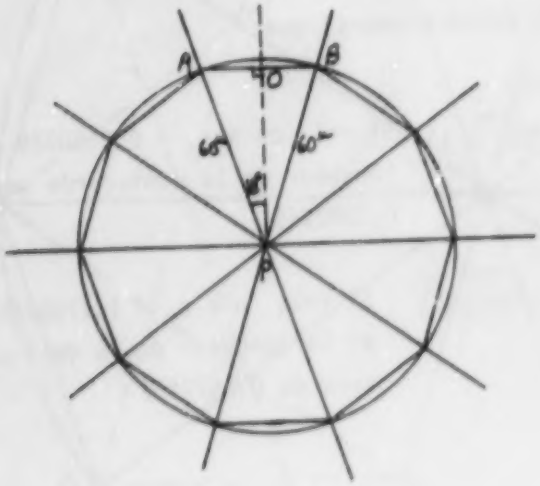
N.B.: $\frac{84,852777}{2} = 42,426389$

$\frac{42,426389}{60} = 0,7071064$

Ce qui correspond environ à la valeur de sin 45°

Sin 45° = 0, 7071067

crd 36° = 37,0819444 = 37^m 4' 55''



$\overline{AO} = \frac{37,0819444}{2} = 18,540972$

$\frac{18,540972}{60} = 0,3090162$

Ce qui correspond environ à la valeur de sin 18°

Sin 18° = 0,3090169

La façon de calculer la mesure de la corde est expliquée un peu plus loin

crd 72° = 70,5341666 = 70^{dd} 32' 3''

La façon de calculer la mesure de la corde est expliquée un peu plus loin

$AO = \frac{70,5341666}{2} = 35,267083$

$\frac{35,267083}{60} = 0,5877847$

Ce qui correspond environ à la valeur de sin 36°
Sin 36° = 0,5877852

En fait, Ptolémée savait (de ses prédécesseurs) que:

côté d'un décagone régulier

$c_d = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ Si r=1, on a c_d = 0,6180339 et la longueur de la demi-corde sera de 0,3090169

côté d'un pentagone régulier

$c_p = \frac{R}{2}(\sqrt{10-2\sqrt{5}})$ Si r=1, on a c_p = 1,1755705 et la longueur de la demi-corde sera de 0,5877852

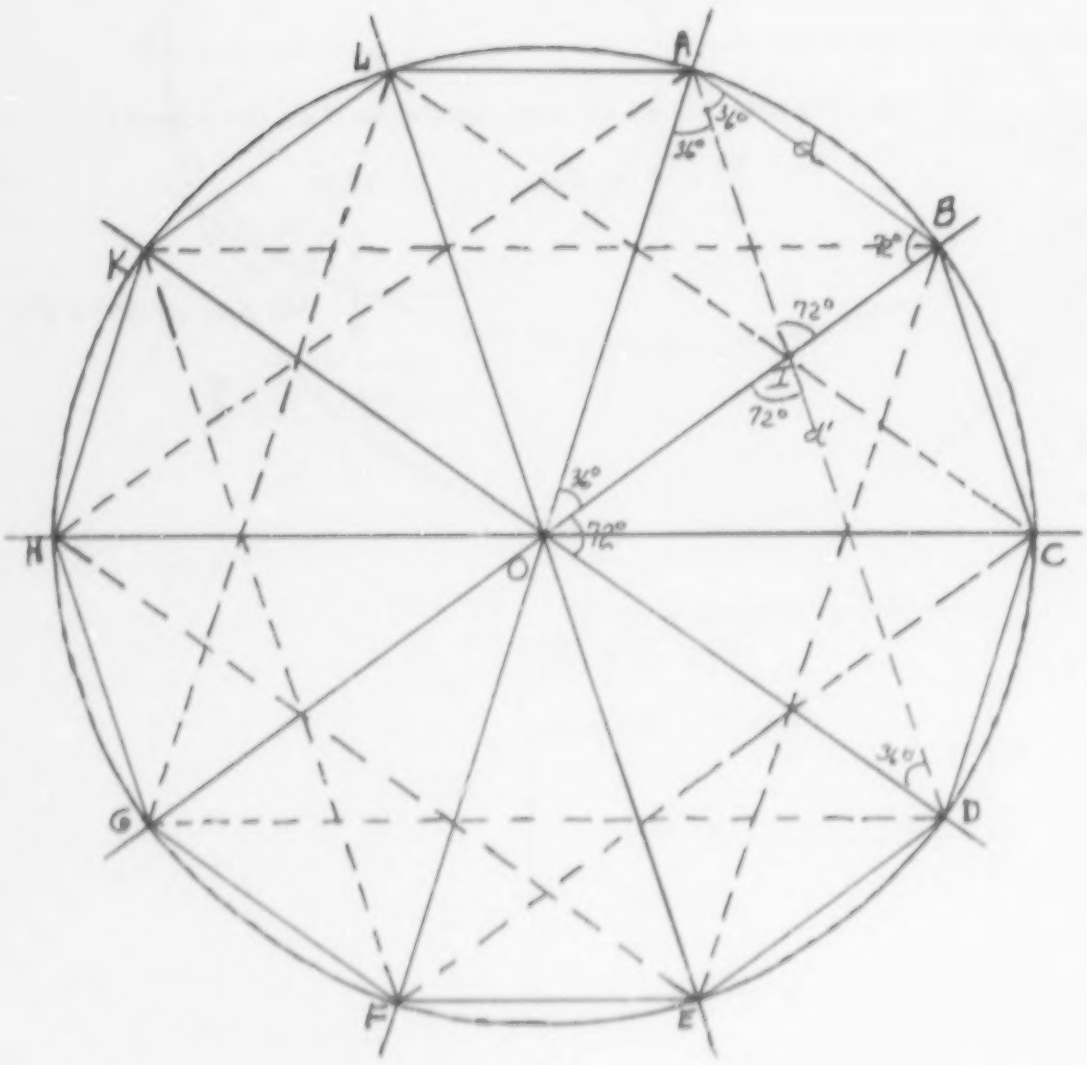
DEMONSTRATION

Décagone et pentagone régulier inscrits

(1) Inscrire les deux décagones réguliers (convexe et étoilé)

joindre les points de division de 1 en 1 (trait plein)

joindre les points de division de 3 en 3 (trait pointillé)



a) AF, BG et KD sont des diamètres
Les triangles OAB, BAI et IOD sont isocèles et équiangles
(tous leurs angles à la base ont même mesure
que la moitié de 4 divisions sur le cercle)

On a donc: $AI = AB = d$ et $ID = OD = R$
d'où $AD = d + R$

$$d' = d + R$$
$$\boxed{d' - d = R} \quad (1)$$

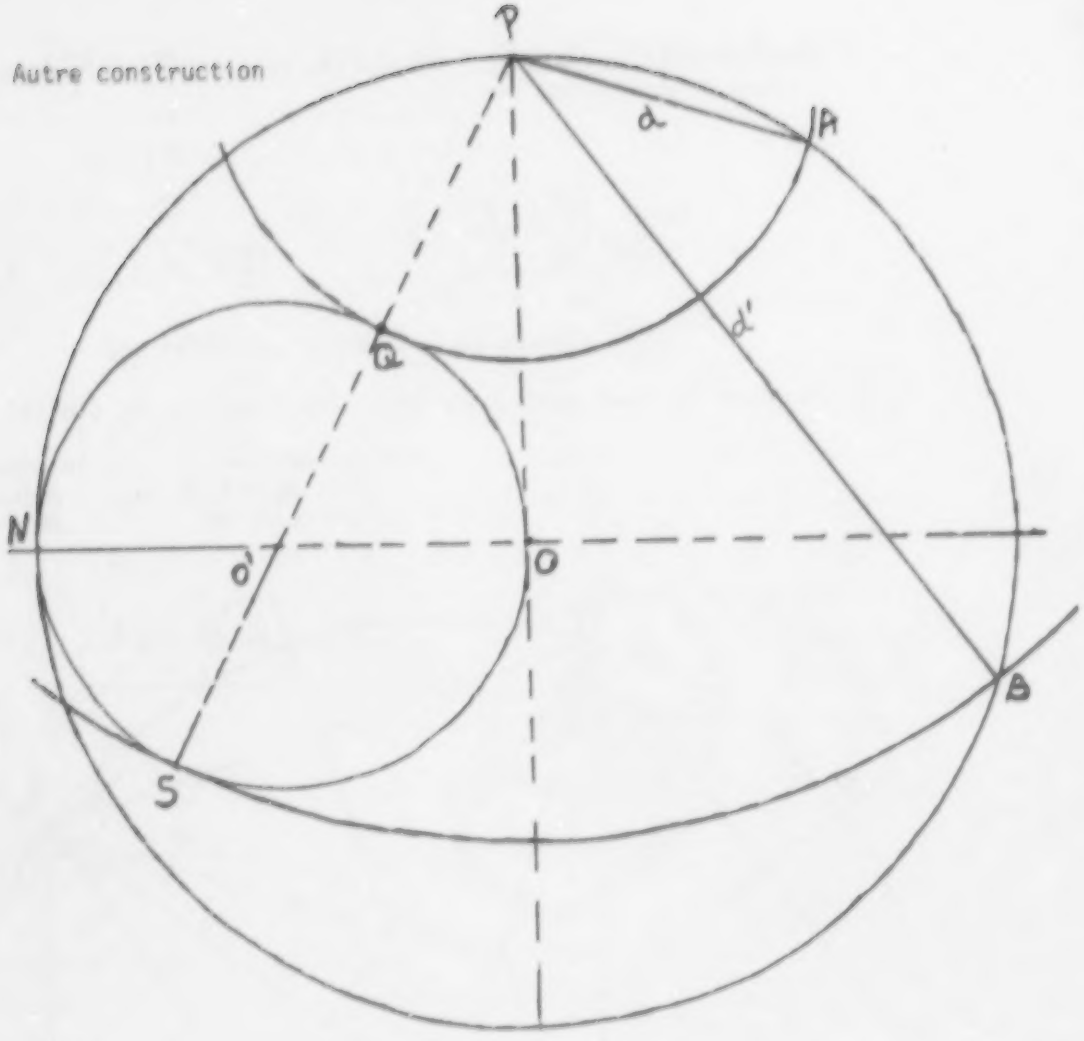
b) Les triangles AOD et AIO sont semblables ($\measuredangle A$ est commun)

$$\frac{OA}{AI} = \frac{AD}{OA} \rightarrow d'où \quad \overline{OA}^2 = AI \cdot AD$$

(AI = d
et
AD = d' et $\overline{OA}^2 = R^2$)

$$\boxed{d \cdot d' = R^2} \quad (2)$$

c) Autre construction



On a:

$$AP = PQ = PO' = O'Q$$

$$\overline{PO'}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OO'}^2$$

d'où $\overline{PO'}^2 = R^2 + \frac{R^2}{4}$

$$PO' = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

et

$$O'Q = \frac{R}{2}$$

Donc: $AP = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2}$

$$AP = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

→ *côté du décagone régulier*

⟶ On a aussi: $PB = PS = PO' + O'S$

$PO' = \frac{R\sqrt{5}}{2}$

et

$O'S = \frac{R}{2}$

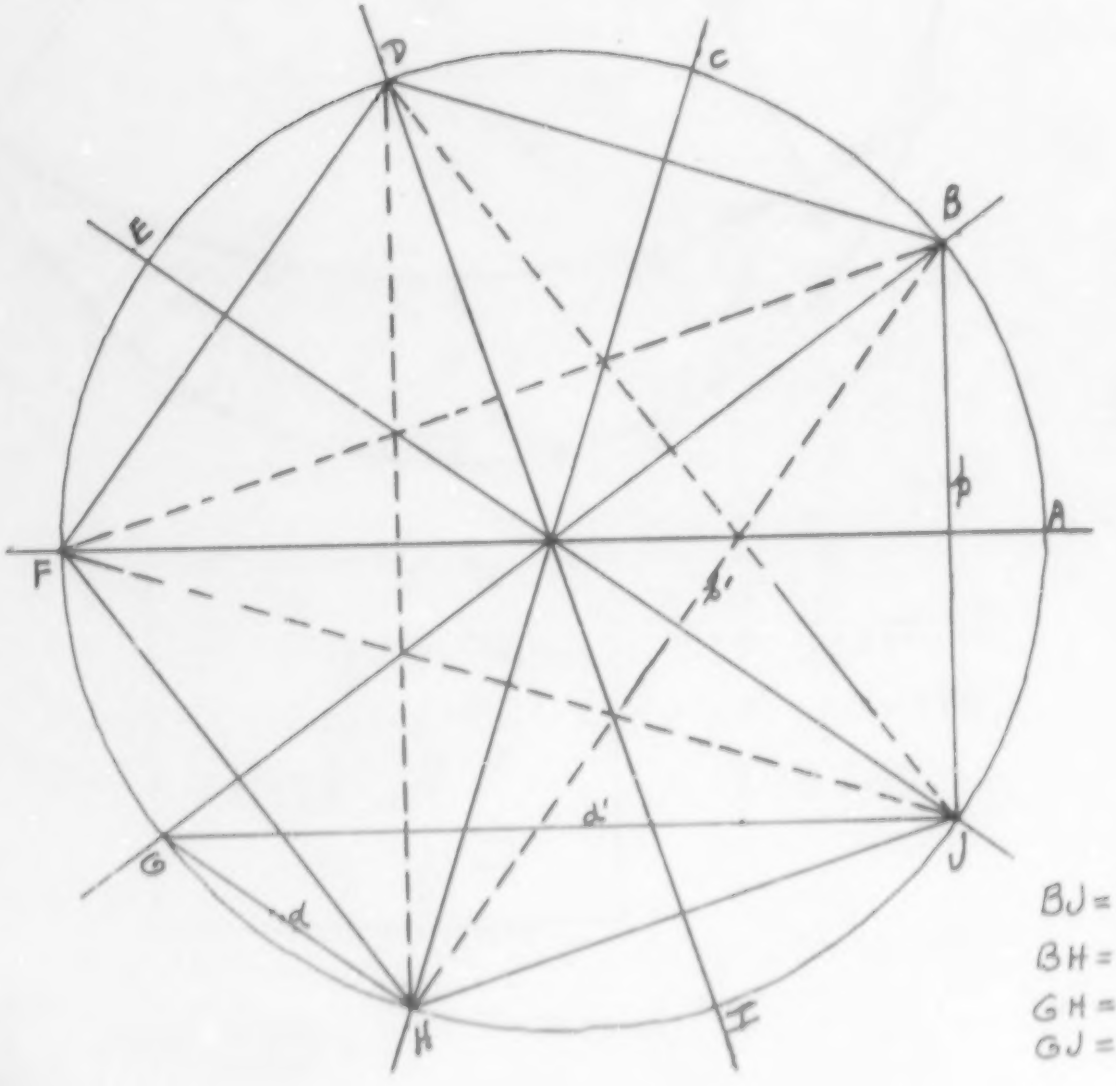
Donc: $PB = \frac{R\sqrt{5}}{2} + \frac{R}{2}$

$$\boxed{PB = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)}$$

(2) Inscrire les deux pentagones réguliers (convexe et étoilé)

joindre les points de division de 2 en 2 ←

→ joindre les points de division de 4 en 4



Les triangles GBH et GBJ sont rectangles (comme étant inscrits dans une demi-circonférence)

Ainsi: $p^2 + d'^2 = \overline{GB}^2$ et $p'^2 + d^2 = \overline{GB}^2$

$$\boxed{p^2 + d'^2 = 4R^2} \quad (3) \qquad \boxed{p'^2 + d^2 = 4R^2} \quad (4)$$

Des relations (1) et (2), on obtient (5)

$d' - d = R$

$\downarrow$

$(d' - d)^2 = R^2$

$d'^2 - 2d'd + d^2 = R^2$ or: $d'd = R^2$

$\downarrow$

$d'^2 - 2R^2 + d^2 = R^2$

$$\boxed{d'^2 + d^2 = 3R^2} \quad (5)$$

Donc:

$$\begin{array}{r} p^2 + d'^2 = 4R^2 \\ - \quad d'^2 - d^2 = -3R^2 \\ \hline p^2 - d^2 = R^2 \end{array}$$

et

$$p^2 = d^2 + R^2$$

et

$$\begin{array}{r} p'^2 + d^2 = 4R^2 \\ - \quad d'^2 - d^2 = -3R^2 \\ \hline p'^2 - d'^2 = R^2 \end{array}$$

et

$$p'^2 = d'^2 + R^2$$

$\overline{BJ}^2 = 4R^2 - \overline{GJ}^2$

$p^2 = 4R^2 - d'^2$

$p^2 = 4R^2 - \left(\frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)\right)^2$

$p^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(6 + 2\sqrt{5})$

$p = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

$\overline{BH}^2 = 4R^2 - \overline{GH}^2$

$p'^2 = 4R^2 - d^2$

$p'^2 = 4R^2 - \left(\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right)^2$

$p'^2 = 4R^2 - \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$

$p' = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$

$\downarrow$

côté du pentagone régulier

Donc: $c_d = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$

Si $R = 1$, on a $c_d = 0{,}6180339$

et la longueur de la demi-corde sera de 0,3090169

Or: $\text{Sin } 18^\circ = 0{,}3090169$

Donc: $c_p = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$

Si $R = 1$, on a $c_p = 1{,}1755705$

et la longueur de la demi-corde sera de 0,5877852

Or: $\text{Sin } 36^\circ = 0{,}5877852$

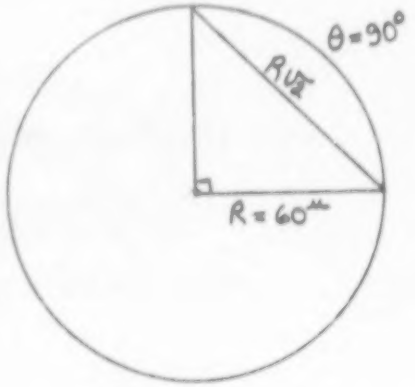
2) Pour le mathématicien, l'almagest est extrêmement intéressant, à cause des identités trigonométriques que Ptolémée fût dans l'obligation de développer (d'inventer) pour pouvoir compiler sa table de cordes.

La circonférence du cercle fût subdivisée en 360 parties égales (aujourd'hui appelé des degrés); le diamètre fût divisé en 120 parties (r=60); alors chacune de ces divisions fût divisée en 60 parties que l'on appela «Partes minutae primae» (les premières petites parties), et chacune de ces premières petites parties fût divisée en 60 parties que l'on appela «Partes minutae secundae» (les secondes petites parties). Il s'agit en fait de notre système de minutes et de secondes.

L'utilisation des soixantièmes est due à l'influence du système sexagésimal des Babyloniens, dont les travaux en astronomie étaient connus des Grecs. La table des cordes de Ptolémée dont les longueurs de cordes pour des arcs de $1/2^\circ$ à 180° par sauts de $1/2^\circ$.

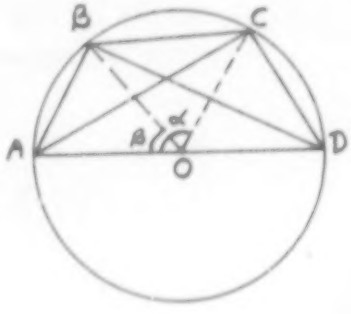
Au départ, on sait que la corde correspondant à un arc de 90° est égale à :

$$\text{crd } 90^\circ = R\sqrt{2} = 84^{\prime} 51' 10'', \text{ sachant que } R = 60^{\prime}$$



L'utilisation ingénieuse faite par Ptolémée, pour compiler les mesures des cordes, est basée sur un théorème que l'on appelle aujourd'hui le «théorème de Ptolémée»; dans l'almagest, Ptolémée fournit la preuve de ce théorème; on sait cependant que ce théorème était connu bien avant Ptolémée. Il affirme que:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$



On en déduit que:

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} - \overline{AB} \cdot \overline{CD}$$

Ce qui correspond à:

$$120 \cdot \text{crd}(\alpha - \beta) = \text{crd}\,\gamma \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}\,\beta \cdot \text{crd}(180^\circ - \gamma)$$

Cette formule: $120 \cdot \text{crd}(\alpha - \beta) = \text{crd}\alpha \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}\beta \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha)$

ou: $\text{crd}\ 180^\circ \cdot \text{crd}(\alpha - \beta) = \text{crd}\alpha \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}\beta \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha)$

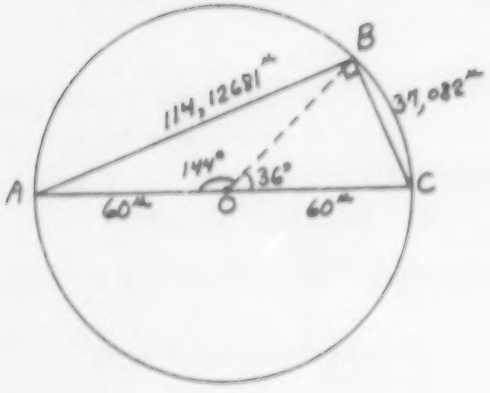
est l'équivalent

de celle que nous connaissons:

$$\text{Sin}(U - V) = \text{Sin}\,U \cdot \cos V - \text{sin}\,V \cdot \cos U$$

3) Pour trouver certains angles, Ptolémée se servait aussi du concept d'angles supplémentaires, en le reliant à la relation de Pythagore.

Exemple:



On sait que:

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$

et que

$\text{crd}\ 36^\circ = 37{,}0819444$

Donc:

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2$

$\text{crd}^2\ 144^\circ = \text{crd}^2\ 180^\circ - \text{crd}^2\ 36^\circ$

$\text{crd}^2\ 144^\circ = (120)^2 - (37{,}0819444)^2$

$\text{crd}^2\ 144^\circ = 13024{,}929$

$\text{crd}\ 144^\circ = 114{,}12681$

ce qui correspond à

$114^\circ\ 7'\ 37''$

N.B.: si $\text{crd}\ 36^\circ = 37{,}0819444$

ou

$\text{crd}\ 36^\circ = 0{,}618032407$

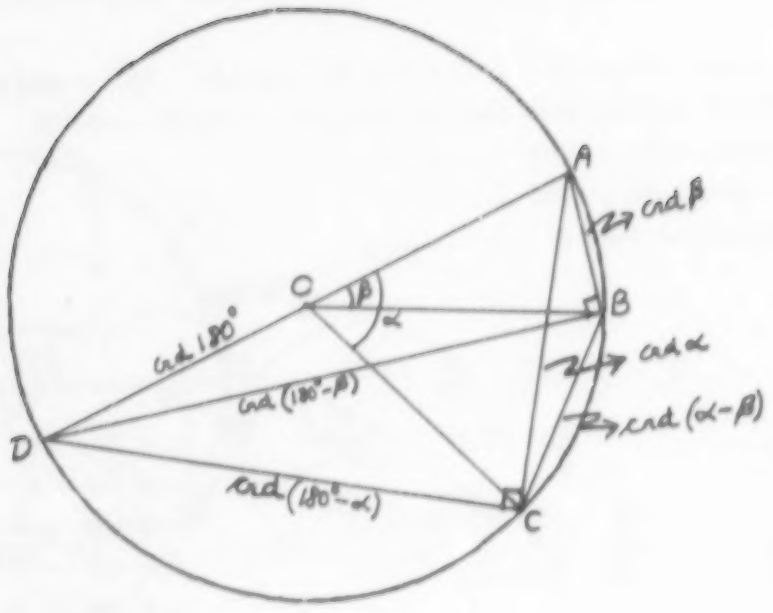
alors $\sin 18^\circ = \frac{0{,}618032407}{2} = 0{,}309016203$

sur la calculatrice on trouve 0,309016994

Ne pas oublier que le sinus est en relation avec la longueur de la demi-corde

En fait:

$$\text{Sin}\ \frac{\alpha}{2} = \frac{\text{crd}\,\alpha}{2}$$



$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$

$\text{crd}\,\beta \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha) + \text{crd}\,180^\circ \cdot \text{crd}\,(\alpha - \beta) = \text{crd}\,\alpha \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta)$

$\text{crd}\,180^\circ \cdot \text{crd}\,(\alpha - \beta) = \text{crd}\,\alpha \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}\,\beta \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha)$

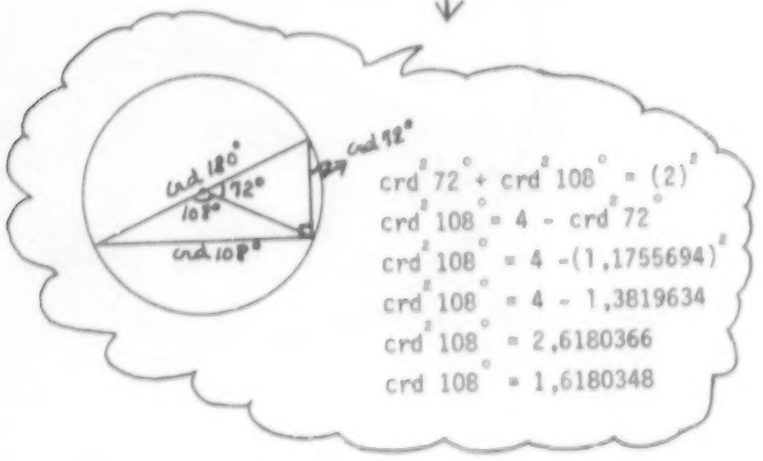
Exemple:

Pour compiler «crd 12°», il utilisa «crd (72° - 60°)»

On a: $\text{crd } 180^\circ \cdot \text{crd}(\alpha - \beta) = \text{crd}\,\alpha \cdot \text{crd}(180^\circ - \beta) - \text{crd}\,\beta \cdot \text{crd}(180^\circ - \alpha)$

Ainsi: $2 \cdot \text{crd}(72^\circ - 60^\circ) = \text{crd } 72^\circ \cdot \text{crd}(180^\circ - 60^\circ) - \text{crd } 60^\circ \cdot \text{crd}(180^\circ - 72^\circ)$

$2 \cdot \text{crd } 12^\circ = \text{crd } 72^\circ \cdot \text{crd } 120^\circ - \text{crd } 60^\circ \cdot \text{crd } 108^\circ$



$2 \cdot \text{crd } 12^\circ = \text{crd } 72^\circ \cdot \text{crd } 120^\circ - \text{crd } 60^\circ \cdot \text{crd } 108^\circ$

$2 \cdot \text{crd } 12^\circ = 1{,}1755705 \cdot 1{,}7309398 - 1 \cdot 1{,}6180348$

$2 \cdot \text{crd } 12^\circ = 2{,}0350746 - 1{,}6180348$

$2 \cdot \text{crd } 12^\circ = 0{,}4170397$

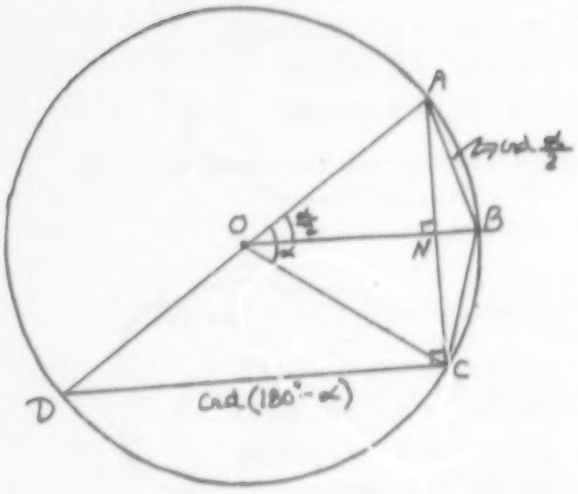
$\text{crd } 12^\circ = 0{,}2085198$

$12^\circ 30' 40''$ et $\text{Sin } 6^\circ = 0{,}1045285$

4) Pour trouver d'autres angles, Ptolémée se servit ensuite de la relation crd $\frac{\alpha}{2}$ exprimée en termes de crd α

$$\text{crd}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \text{ crd } 180^\circ (\text{crd } 180^\circ - \text{crd } (180^\circ - \alpha))$$

Démonstration



Le $\triangle$ ANO est semblable au $\triangle$ ACD
- les deux triangles sont rectangles (en N et C)
- l'angle OAC est le même pour les 2 triangles
- ainsi $\angle$AON a la même mesure que $\angle$ ADC

Donc: $\frac{AN}{AC} = \frac{ON}{DC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ON}{DC}$

et $ON = \frac{DC}{2}$

De plus: $BN = BO - ON$

$BN = \frac{AD}{2} - \frac{DC}{2}$

$\overline{AB}^2 = \overline{BN}^2 + \overline{AN}^2$

$\overline{AB}^2 = \left(\frac{AD}{2} - \frac{DC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2$

$\overline{AB}^2 = \frac{\overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC}}{4} + \frac{\overline{AC}^2}{4}$

$\overline{AB}^2 = \frac{2\,\overline{AD}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DC}}{4}$ (car $\overline{AD}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AC}^2$)

$\overline{AB}^2 = \frac{2\,\overline{AD}\,(\overline{AD} - \overline{DC})}{4}$

$\overline{AB}^2 = \frac{\overline{AD}\,(\overline{AD} - \overline{DC})}{2}$

$\downarrow$

$$\boxed{\text{crd}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \text{ crd } 180^\circ \cdot (\text{crd } 180^\circ - \text{crd } (180^\circ - \alpha))}$$

A l'aide de cette relation, il obtient successivement les valeurs de crd 6°, crd 3°, crd $1\ 1/2^\circ$ et crd $3/4^\circ$.

Ainsi:

a) $\text{crd}^2 \frac{12^\circ}{2} = \frac{1}{2} \text{crd } 180^\circ (\text{crd } 180^\circ - \text{crd } (180^\circ - 12^\circ))$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 (2 - \text{crd } 168^\circ)$

$= 2 - \text{crd } 168^\circ$

$= 2 - 1,9891002$

$\text{crd}^2 \frac{12^\circ}{2} = 0,0108998$

$\text{crd } 6^\circ = 0,1044021$

$\text{crd}^2 168^\circ + \text{crd}^2 12^\circ = (2)^2$
$\text{crd}^2 168^\circ = 4 - \text{crd}^2 12^\circ$
$\text{crd}^2 168^\circ = 4 - 0,0434805$
$\text{crd}^2 168^\circ = 3,9565195$
$\text{crd } 168^\circ = 1,9891002$

b) $\text{crd}^2 \frac{6^\circ}{2} = \frac{1}{2} \text{crd } 180^\circ (\text{crd } 180^\circ - \text{crd } (180^\circ - 6^\circ))$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 (2 - \text{crd } 174^\circ)$

$= 2 - \text{crd } 174^\circ$

$= 2 - 1,9972666$

$\text{crd}^2 \frac{6^\circ}{2} = 0,00273341$

$\text{crd } 3^\circ = 0,052282$

$\text{crd}^2 174^\circ + \text{crd}^2 6^\circ = (2)^2$
$\text{crd}^2 174^\circ = 4 - \text{crd}^2 6^\circ$
$\text{crd}^2 174^\circ = 4 - 0,0109262$
$\text{crd}^2 174^\circ = 3,9890738$
$\text{crd } 174^\circ = 1,9972666$

c) $\text{crd}^2 \frac{3^\circ}{2} = \frac{1}{2} \text{crd } 180^\circ (\text{crd } 180^\circ - \text{crd } (180^\circ - 3^\circ))$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 (2 - \text{crd } 177^\circ)$

$= 2 - \text{crd } 177^\circ$

$= 2 - 1,9993151$

$\text{crd}^2 \frac{3^\circ}{2} = 0,000171315$

$\text{crd } 1,5^\circ = 0,0261702$

$\text{crd}^2 177^\circ + \text{crd}^2 3^\circ = (2)^2$
$\text{crd}^2 177^\circ = 4 - \text{crd}^2 3^\circ$
$\text{crd}^2 177^\circ = 4 - 0,0027341$
$\text{crd}^2 177^\circ = 3,9972609$
$\text{crd } 177^\circ = 1,9993151$

d) $\text{crd}^2 \frac{1,5^\circ}{2} = \frac{1}{2} \text{crd } 180^\circ \ (\text{crd } 180^\circ - \text{crd } (180^\circ - 1,5^\circ))$

$= \frac{1}{2} \cdot 2 \ (2 - \text{crd } 178,5^\circ)$

$= 2 - \text{crd } 178,5^\circ$

$= 2 - 1,9998287$

$\text{crd}^2 \frac{1,5^\circ}{2} = 0,000171315$

$\text{crd } 0,75^\circ = 0,0130887$

$\text{crd}^2 178,5^\circ + \text{crd}^2 1,5^\circ = (2)^2$

$\text{crd}^2 178,5^\circ = 4 - \text{crd}^2 1,5^\circ$

$\text{crd}^2 178,5^\circ = 4 - 0,00068488$

$\text{crd}^2 178,5^\circ = 3,9993148$

$\text{crd}^2 178,5^\circ = 1,9998287$

e) Ptolémée, par une habile interpolation entre $1,5^\circ$ et $0,75^\circ$, obtient

$\text{crd } 1^\circ = 0,0174537$, soit $1^{\text{m}}\ 2'\ 50''$

Par une simple interpolation, on obtient:

$$\text{crd } 1^\circ = \frac{\text{crd } 1,5^\circ - \text{crd } 0,75^\circ}{3} + \text{crd } 0,75^\circ$$

$$= \frac{0,0261702 - 0,0130887}{3} + 0,0130887$$

$$= 0,0174492$$

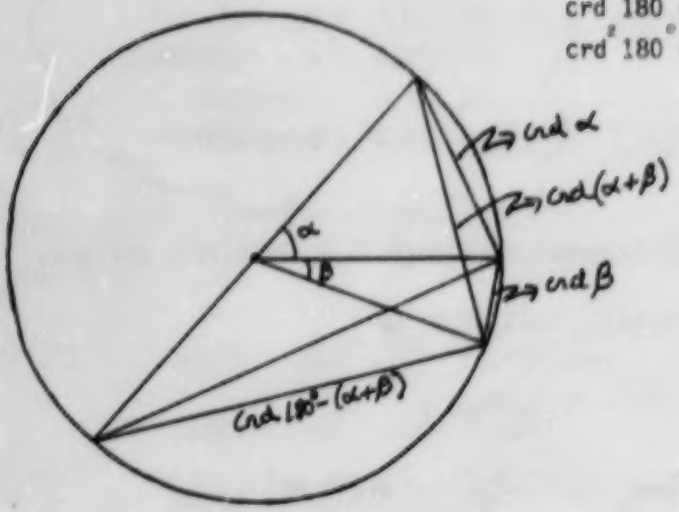
Par interpolation linéaire, on obtient aussi:

$$\text{crd } \frac{1^\circ}{2} = 0,0087282$$

Puis, avec l'aide d'une relation de la forme $crd(\alpha + 1/2^\circ)$, tout le tableau peut être complété:

Démonstration:

$$crd^2 180^\circ = crd^2(\alpha+\beta) + crd^2(180^\circ - (\alpha+\beta))$$
$$crd^2 180^\circ = crd^2(\alpha+\beta) + crd^2((180^\circ - \alpha) - \beta)$$



On sait que:

$$crd\ 180^\circ \cdot crd(\alpha-\beta) = crd\alpha \cdot crd(180^\circ-\beta) - crd\beta \cdot crd(180^\circ-\alpha)$$
$$crd\ 180^\circ \cdot crd((180^\circ-\alpha)-\beta) = crd(180^\circ-\alpha) \cdot crd(180^\circ-\beta) - crd\beta \cdot crd(180^\circ-(180^\circ-\alpha))$$
$$crd((180^\circ-\alpha)-\beta) = \frac{crd(180^\circ-\alpha)\cdot crd(180^\circ-\beta) - crd\beta \cdot crd\alpha}{crd\ 180^\circ}$$

$$\text{Aussi: } crd^2(\alpha+\beta) = crd^2 180^\circ - \left[\frac{crd(180^\circ-\alpha)\cdot crd(180^\circ-\beta) - crd\beta\cdot crd\alpha}{crd\ 180^\circ}\right]^2$$

$$crd^2(\alpha+\beta) = 4 - \left[\frac{crd(180^\circ-\alpha)\cdot crd(180^\circ-\beta) - crd\beta\cdot crd\alpha}{2}\right]^2$$

$$crd(\alpha+\beta) = \sqrt{4 - \left[\frac{crd(180^\circ-\alpha)\cdot crd(180^\circ-\beta) - crd\beta\cdot crd\alpha}{2}\right]^2}$$

Exemple:

$$\text{crd}(\alpha+\beta)^\circ = \sqrt{4-\left[\frac{\text{crd}(180^\circ-\alpha)\cdot\text{crd}(180^\circ-\beta)-\text{crd}\beta\cdot\text{crd}\alpha}{2}\right]^2}$$

$$\text{crd}(1 + 1/2)^\circ = \sqrt{4-\left[\frac{\text{crd } 179^\circ \cdot \text{crd } 179\ 1/2^\circ - \text{crd } 1/2^\circ \cdot \text{crd } 1^\circ}{2}\right]^2}$$

Pour trouver crd 179° et crd 179,5°, on utilise la relation de Pythagore.

$$\text{crd}(1 + 1/2)^\circ = \sqrt{4-\left[\frac{1,9999238 \cdot 1,999981 - 0,0087282 \cdot 0,0174537}{2}\right]^2}$$

$$\text{crd}(1 + 1/2)^\circ = \sqrt{4-\left[\frac{3,9998096 - 0,000152339}{2}\right]^2}$$

$$\text{crd}(1 + 1/2)^\circ = \sqrt{4- 3,999314553}$$

$$\text{crd}(1 + 1/2)^\circ = \sqrt{0,000685447}$$

$$\text{crd}(1 + 1/2)^\circ = 0,026181$$

(on peut vérifier avec crd 1 1/2° déjà trouvé!)

Ensuite, il trouva une expression équivalente à crd(α+ 1/2°) et le tour était joué.

Pour plus de rapidité et de précision, il développa la relation crd 2α en fonction de crdα, et ainsi de suite

crd 2α = crd(α + α)

crd 3α = crd(2α + α)

etc..

Avec l'aide des principes vus précédemment, Ptolémée fut capable de construire la table des cordes de 1/2° à 180°, par tranches de 1/2°, et ce avec une précision fort acceptable.

Ne pas oublier que c'était une table des cordes; car plus tard, l'établissement d'une table des demi-cordes apporta un niveau de précision plus élevé par rapport à la fonction sinus qui devait naître.

D'AUTRES METHODES DE CALCUL

a) *Les tablettes babyloniennes*

Il est important de noter qu'en développant sa théorie de construction des tables, Ptolémée utilisa des éléments géométriques découverts par Euclide. Il semble que la grande qualité de Ptolémée fût de pouvoir réunir des éléments connus à son époque, d'en faire un tout logique qui lui permit de construire ses premières tables. Ceci inclût évidememnt les travaux d'Hipparque qui, en -150 (3 siècles avant Ptolémée) écrivit un traité sur les cordes, lequel fût par la suite perdu!

En faisant exception de certains indices obtenus sur deux vieilles tablettes babyloniennes rédigées en écriture cunéiforme, on ne possède aucun moyen de savoir comment la trigonométrie des cordes est apparue.

Une de ces tablettes calcule la longueur d'une corde en termes de «sinus versus», ainsi que le diamètre d'un cercle.

L'autre tablette est fortement mutilée; la portion qui est lisible (!) est un développement de triplets pythagoriciens, disposé sur 4 colonnes et 15 rangées.

La première colonne (a_n) indique les nombres entiers de 1 à 15 ($n = 1,2, \ldots, 15$).

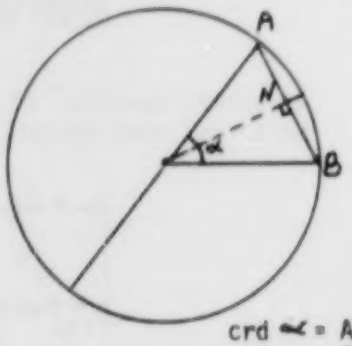
Les 2e et 3e colonnes (b_n et c_n) donnent les 2e et 3e élément vérifiant la relation ($c_n^2 = b_n^2 + a_n^2$).

La dernière colonne donne les nombres $\left(\frac{c_n}{a_n}\right)$ ce qui serait peut-être l'ancêtre de la fonction sécante ou cosécante.

b) *L'apparition de la fonction sinus*

Au début, on utilisait la mesure des cordes comme fonction; il devint bientôt nécessaire d'avoir une table dans laquelle l'arc original correspondrait directement à la valeur cherchée.

Plus tard, quelqu'un pensa à calculer et à utiliser une table de demi-cordes. Lorsque cela fut réalisé, la fonction «sinus» était née.



crd α = AB

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2}$ = AN

Les premières tables de sinus furent compilées aux Indes. Leurs inventeurs inconnus connaissaient et avaient exploré les idées émises par les mathématiciens Grecs et Babyloniens.

Le Surya Siddhanta est un recueil de lois d'astronomie (400), contenant peu d'explications et ne contenant aucune preuve. Il fut composé au 4e ou 5e siècle, mais la version que l'on connaît provient d'une version révisée si fréquemment qu'il est difficile de savoir quelles sections sont demeurées dans leur forme originale.

Voici quelques extraits traduits du livre II du Surya Siddhanta.

15. La huitième partie des minutes d'un signe zodiacal est appelée le premier sinus.

$S_1 = \frac{30^\circ}{8} = \frac{1800'}{8} = 225'$ $\qquad \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$

et

$S_2 = S_1 + \left(S_1 - \frac{S_1}{S_1}\right)$

ainsi: $S_2 = 225' + (225' - \frac{225'}{225'})$

$S_2 = 449'$

16. Après cela, en divisant la somme des sinus compilés en succession par le premier sinus et en soustrayant le résultat obtenu de la somme du premier sinus et du dernier sinus compilé, on obtient alors le sinus suivant:

$$S_3 = S_2 + S_1 - \frac{S_1 + S_2}{S_1}$$

$$S_4 = S_3 + S_1 - \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S_1}$$

$$S_{n+1} = S_n + S_1 - \frac{S_1 + S_2 + \ldots S_n}{S_1} \quad (\text{pour } n = 1, 2, 3, \ldots, 23)$$

Le résultat obtenu est une table des 24 premiers sinus placés dans l'ordre.

Les versets qui suivent donnent la liste des nombres partiellement compilés dans la colonne S_n

22. En les soustrayant dans l'ordre inverse, du demi-diamètre, on trouve la table des sinus versus (V_n dans la table).

La table qui suit n'apparaissait pas telle quelle dans le Surya Siddhanta. Le Surya Siddhanta donne seulement les nombres enregistrés dans les colonnes S_n et V_n.

n	225'n	S_n	ΔS_n	$\Delta_2 S_n$	V_n
1	3 3/4°	225'	224	- 2	7'
2	7 1/2°	449'	222	- 2	29'
3	11 1/4°	671'	219	- 3	66'
4	15°	890'	215	- 4	117'
5	18 3/4°	1105'	210	- 5	182'
6	22 1/2°	1315'	206	- 4	262'
7	26 1/4°	1521'	198	- 8	355'
8	30°	1719'	191	- 8	460'
9	33 3/4°	1910'	183	- 8	580'
10	37 1/2°	2093'	174	- 9	710'
11	41 1/4°	2267'	164	- 10	853'
12	45°	2431'	154	- 10	1007'
13	48 3/4°	2585'	143	- 11	1171'
14	52 1/2°	2728'	131	- 12	1345'
15	56 1/4°	2859'	118	- 13	1528'
16	60°	2977'	106	- 12	1719'
17	63 3/4°	3083'	93	- 13	1917'
18	67 1/2°	3176'	80	- 15	2123'
19	71 1/4°	3256'	65	- 15	2333'
20	75°	3321'	51	- 14	2548'
21	78 3/4°	3372'	37	- 16	2767'
22	82 1/2°	3409'	22	- 15	2989'
23	86 1/4°	3431'	7		3213'
24	90°	3438			3438'

On pourrait compléter cette table à l'aide des formules établies!

Si on traçait le graphique de la séquence S_n, on verrait apparaître le quart (1/4) de la courbe du sinus; en particulier, elle atteint la demie de son amplitude maximale en atteignant le tiers (1/3) de son parcours vers le maximum (i.e.: $S_8 = \frac{S_{24}}{2}$)

En général: $Sin_R\ \theta = R \sin \theta$

Ici: $S_n = Sin_{3438'}(n \cdot 225') = 57^{\circ}; 18' \ Sin(n \cdot 3^{\circ}; 45')$

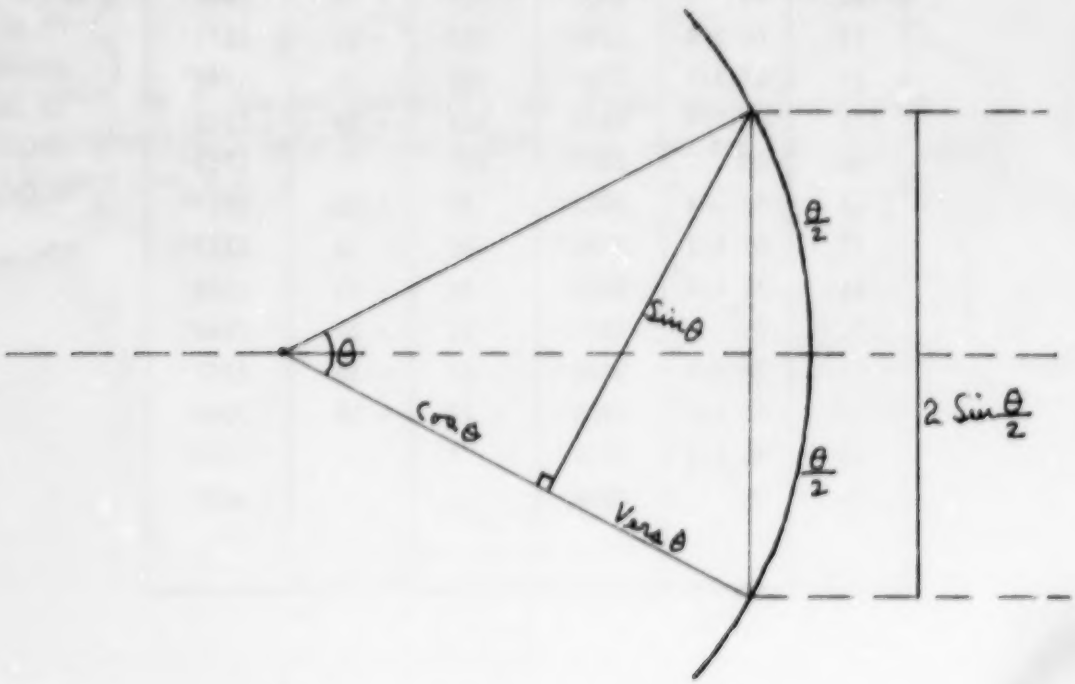
$\hookrightarrow \frac{225'}{60} = 3^{\circ}; 45'$

Ces principes ont du sens à la condition que l'on considère le degré, non pas comme une unité angulaire, mais comme une mesure de longueur d'arc.

La circonférence d'un cercle est égale à: $360^{\circ} \times 60' = 21{,}600'$
Le rayon de ce cercle est égal à: $\frac{21600'}{2\pi} \simeq 3438'$

ceci explique pourquoi 225' est devenu l'incrément retenu.

Ils calculèrent d'abord sin 30° en utilisant la formule de demi-corde.



$$\text{Sin } \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{sin}^2\theta + \text{Vers}^2\theta}$$

où Vers θ = R - cos θ ≡ R(1-cosθ) = RVers θ

Sinus versus (fonction utilisée par les arpenteurs de l'époque (la colonne V_n))

Exemple:

$$\text{Sin } 30^\circ = \text{Sin } \frac{60^\circ}{2} = 1/2\sqrt{\text{Sin}^2 60^\circ + \text{Vers}^2 60^\circ}$$

$$= 1/2\sqrt{(2977)^2 + (1719)^2}$$

$$= 1/2\sqrt{11817490}$$

$$= 1/2\ (3437,\ 657633)$$

$$= 1718,828817'$$

$$\text{Sin } 30^\circ \simeq 1719'$$

Cette façon de faire permet de trouver les sinus de 15°, $7\ 1/2^\circ$ et $3\ 3/4^\circ$
et Sin $3\ 3/4^\circ$ = 225'

Par la suite, les Hindus ont poursuivi leurs travaux sur les tables trigonométriques en utilisant les concepts de différence première (ΔS_n) et différence seconde ($\Delta_2 S_n$).

SECTION 2

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

BLOC 1

Objectifs 2.3.1, 2.3.2

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.1)	TRANSFORMER des degrés en radians et vice versa	PAGE: 1

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITES 1: LA MESURE DES ANGLES

L'enseignant demande aux élèves:

«Que signifie le DEG, RAD, GRA sur une calculatrice?»

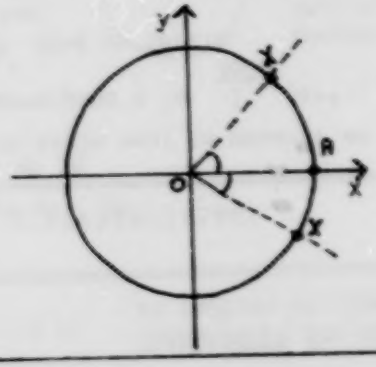
Ces trois symboles sont les abbréviations de DEGRE, RADIAN et GRADE, qui sont trois façons différentes de mesurer des angles.

Toute calculatrice scientifique peut utiliser l'un ou l'autre de ces trois types d'unités.

Pour l'étude des fonctions trigonométriques, on va s'attacher aux degrés dans le cas de calculs pratiques sur les triangles rectangles, et on va utiliser les radians dans tous les autres cas.

LE DEGRE

L'enseignant demande aux élèves ce qu'est un «degré». L'élève trace un cercle de centre O, dans un plan cartésien (Le centre O est à l'origine).



L'élève aura ensuite à tracer des angles au centre AOX

EXERCICES ET REFERENCES

Note: Pour des raisons évidentes, on évite d'utiliser dans ce plan de cours des expressions du genre

mes $\overline{AB}$ et

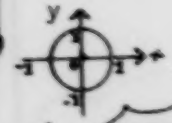
mes$\angle ABC$, que l'on remplace par

$\overline{AB}$ et$\angle ABC$

ou

AB et$\angle ABC$

Définir le cercle trigonométrique.



Dans un cercle, on mesure un angle à partir de la direction positive de l'axe des x (axe horizontal) Un côté est fixe → côté initial et l'autre côté est mobile → côté terminal

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.1) TRANSFORMER des degrés en radians et vice versa	PAGE: 2

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Rappeler aux élèves qu'un angle peut se mesurer en degrés et qu'un degré correspond à la $\frac{1}{360e}$ partie d'un cercle. Il y a donc 360° dans un cercle.

Rappeler aux élèves la notion d'angle au centre.

Un angle au centre en degrés, a la même mesure que l'arc compris entre ses côtés.
$\angle AOX$ est un angle au centre.

Rappeler aux élèves l'identification des quadrants.

Les élèves effectuent l'exercice ci-contre:

EXERCICES ET REFERENCES

On peut établir un parallèle avec deux rapporteurs d'angles

Parler d'angle quadrantal!

Exercices

Trace les angles suivants sur un cercle trigonométrique (utilise la notation: $\angle AOX$)

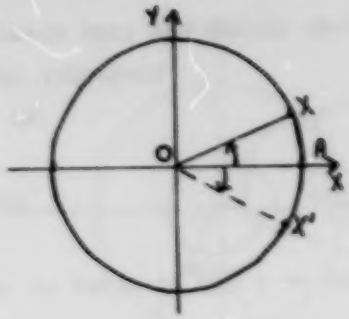
a) 30°	b) 60°	c) 45°	d) 80°
e) 150°	f) 0°	g) 100°	h) 90°
i) 270°	j) 360°	k) 292°	l) 372°

?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Comment pourrait-on faire pour tracer un angle de -30° ?

L'enseignant explique la notion d'angle orienté.



Orienter le plan, c'est choisir le sens giratoire que nous appelons le sens direct ou positif.
L'autre sens giratoire est appelé sens indirect ou négatif.

Le sens positif est défini par le mouvement inverse des aiguilles d'une montre.

Le sens négatif est défini par le mouvement des aiguilles d'une montre.

Ici: $\angle AOX$ est un angle de 30°
et $\angle AOX'$ est un angle de -30°

EXERCICES ET REFERENCES

Dans un cercle trigonométrique, on mesure un angle à partir de la direction positive de l'axe des x (axe horizontal). Un côté est fixe
rayon initial (OA)
et l'autre côté est mobile
rayon terminal (OX)

c'est une convention commode que l'on peut qualifier d'historique!

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.1) TRANSFORMER des degrés en radians et vice versa	PAGE: 4

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Les élèves effectuent l'exercice ci-contre:

Parler d'angle quadrantal!

Comment pourrait-on tracer un angle de 480° ? ou de -480° ?

Parler de la périodicité que l'on retrouve dans un cercle trigonométrique, en ce qui a trait aux angles.

Discussions avec les élèves

On enlève des tranches de 360° et le reste devient important.

L'angle initial et le reste sont des angles co-terminaux.

Parler de sens de rotation et illustrer les deux cas.

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

Trace les angles suivants sur un cercle trigonométrique (utilise la notation: $\angle AOX'$)

a) -30° b) -60° c) -45° d) -80°

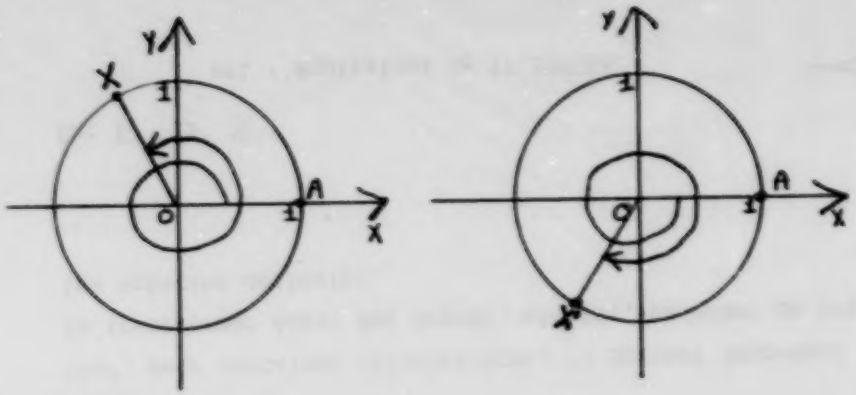
e) -150° f) 0° g) -180° h) -90°

i) -270° j) -360° k) -292° l) -372°

?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.1)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES



Exercices:

Trace les angles suivants sur un cercle trigonométrique.

a) -420° b) 510° c) -650°

d) -890° e) 1020° f) -2010°

g) 610° h) -1812° i) 455°

j) -610°

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.1)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Remarque: lorsque l'on travaille en degrés, on utilise le système sexagésimal.

1 degré = 60 minutes ($1^\circ = 60'$)

1 minute = 60 secondes ($1' = 60''$)

Ex: $17{,}325742^\circ$

est l'équivalent de $17^\circ\ 19'\ 32''$

ou,

si on allait plus loin,

$17^\circ\ 19'\ 32''\ 40'''\ 16^{IV}\ 19^{V}\ 12^{VI}$

Sauf, pour certaines calculatrices, il devient important de transformer aussi des degrés, minutes, secondes en degrés (en notation décimale).

Ex: $17^\circ\ 19'\ 32''$

est l'équivalent de 17,325555

Pourquoi n'obtient-on pas le même résultat que dans l'exemple précédent? (la précision initiale n'était pas la même!)

Expliquer l'origine du mot sexagésimal!

Qui a pour base le nombre 60; se dit d'une fraction dont le dénominateur est 60.

Etablir une correspondance avec la façon de lire l'heure

Expliquer cette transformation à l'aide de la calculatrice

$17 + \frac{19}{60} + \frac{32}{60 \times 60}$

Expliquer aux élèves comment utiliser leur calculatrice!

Les opérations utilisant les degrés, minutes, secondes, sont de l'enrichissement

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
LE RADIAN Le radian, tout comme le degré, est une notion qui sert à la mesure des angles.	Exercices: 1) Transforme en degrés (notation décimale). a) $37^\circ 15'$ b) $130^\circ 10'$ c) $20^\circ 12'10''$ d) $25^\circ 25'30''$ e) $30^\circ 30'30''$ f) $81^\circ 45'$ g) $75^\circ 55'$ h) $85^\circ 18'12''40'''$ 2) Transforme en degrés, minutes, secondes,... a) 35,332222 b) 65,215324 c) 121,45556 d) 11,125117 e) 0,5865129 f) 3,5172817 g) 47,474747 h) 51,722756

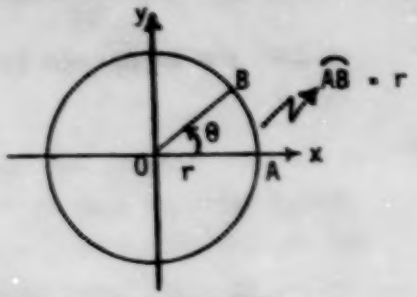
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Si on pose, dans la figure ci-contre, l'égalité suivante:

Longueur $\overset{\frown}{AB} = r$,

Nous disons alors que l'angle

θ = 1 radian



DEFINITION

Un radian est la mesure de l'angle au centre qui sous-tend un arc de cercle dont la longueur est égale au rayon.

L'enseignant demande aux élèves (par rapport au rayon) ce qu'est la circonférence d'un cercle; combien de rayons peut-on placer sur un cercle?

Il y a en fait un peu plus de 6 rayons sur le cercle

A chaque fois que j'ai un angle qui intercepte un arc égal à la longueur d'un rayon, cet angle mesure 1 radian.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Soit C, la circonférence d'un cercle: $C = 2\pi r$

ou $C \simeq 6{,}2832\ r$

Il y a donc 6,2832 rayons (ou 2π rayons) que je peux reporter autour de cette circonférence. Ainsi, si je peux reporter 6,2832 rayons (ou 2π rayons) cela veut dire que j'ai 6,2832 radians (ou 2π radians) autour d'une circonférence ou comme angle au centre d'un cercle.

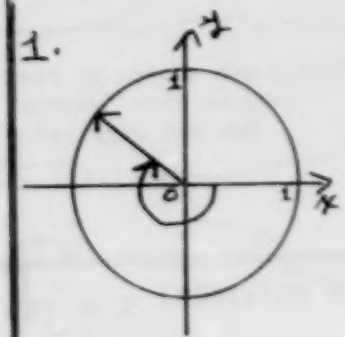
L'enseignant présente aux élèves une feuille sur laquelle, il y a une vingtaine de cercles trigonométriques, sur lesquels sont tracés divers angles (positifs et négatifs). Je leur demande de donner en radian la mesure de chacun de ces angles.

EXERCICES ET REFERENCES

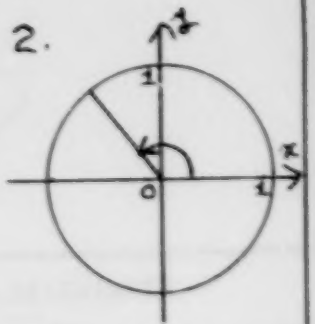
En fait, le radian c'est la $\frac{1}{6{,}2832}$ e partie d'un cercle, ou la $\frac{1}{2\pi}$ e partie d'un cercle.

Exercices

1.



2.



etc

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant demande aussi de construire des angles de

$2\frac{\pi}{3}$, $3\frac{\pi}{2}$, $5\frac{\pi}{4}$, $4\frac{\pi}{3}$, $5\frac{\pi}{6}$, etc.

$-3\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-5\frac{\pi}{3}$, $-3\frac{\pi}{2}$, etc

L'arc doit être exprimé en radians, soit en longueurs de rayons sur l'arc

Rappeler aux élèves de construire leurs angles en partant de la direction positive de l'axe des x.

Etablir une analogie avec la droite des réels

Eviter de dire que $\pi = 180^\circ$, ce qui est faux?
Le but de l'activité étant de travailler en radians, ce n'est pas le temps de faire effectuer une telle transformation.
On verra plus tard qu'à un angle de π radians correspond un angle de 180°.

Il pourrait s'avérer utile de compléter cette activité en signalant qu'un grade est aussi une unité de mesure angulaire, qui correspond à la $\frac{1}{400e}$ partie d'un cercle

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 2: RELATION ENTRE DEGRE ET RADIAN

Pour tout angle exprimé en degrés, il est possible d'obtenir l'équivalent en radians et vice versa.

Il suffit de retenir que le rapport des angles exprimés en degrés est égal au rapport des angles exprimés en radians.

$$\frac{x^\circ}{360^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}}$$

Puisque 360° sont équivalents à 2π radians, on convertit x° (connu) en radians

ou

Puisque 2π radians sont équivalents à 360 degrés, on convertit θ radians (connu) en degrés.

après simplification

$$\frac{x^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{\pi \text{ rad}}$$

On peut donc dire que: π rad est équivalent à 180°

$$\pi \text{ rad} \equiv 180^\circ$$

Ex: Que vaut 45° en radians ?

$$\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi}$$

$$\theta \times 180^\circ = 45^\circ \times \pi$$

$$\theta^\circ = \frac{45^\circ \times \pi}{180^\circ} = 0{,}785 \text{ rad}$$

ou $\theta = \frac{\pi}{4}$ (si on simplifie)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Exemple: Que vaut $\frac{\pi}{3}$ en degrés?

$$\frac{x^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi/3}{\pi} \longrightarrow x^\circ \times \pi = 180^\circ \times \frac{\pi}{3}$$

$$x^\circ = \frac{180^\circ \times \pi}{\pi \times 3}$$

$$x^\circ = 60^\circ$$

L'enseignant pose et discute les questions suivantes avec les élèves:

a) Que vaut 1° en radians?

b) Que vaut 1 rad en degrés?

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

1) Trouve la valeur en degrés et en radians de l'angle correspondant à:

a) 3 révolutions b) -3/4 révolution

c) 5/8 révolution d) 0,125 révolution

2) Détermine les angles suivants en radians en les formulant à l'aide de π.

a) 30° b) -160° c) 36° d) -90°

e) 300° f) $75^\circ 30'$ g) $-112^\circ 40'$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	3) Détermine les angles suivants en radians: a) 1° b) 94° c) 390° d) $23^{\circ}40'$ e) $-34^{\circ}22'$ 4) Détermine les angles suivants en degrés: a) $\pi/5$ b) $-7\pi/6$ c) $11\pi/6$ d) $-\pi/18$ e) $22\pi/5$ f) $-60\pi/7$ 5) Détermine les angles suivants en degrés: a) 3 rad b) 4,1 rad c) 0,162 rad d) -2,5 rad e) 1,75 rad 6) Indique dans quel quadrant se trouve le côté terminal des angles suivants: a) 50° b) 320° c) 175° d) 640° e) 470° f) 120° g) $40\pi/6$ h) $147\pi/4$ i) $14\pi/2$ j) $102\pi/12$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

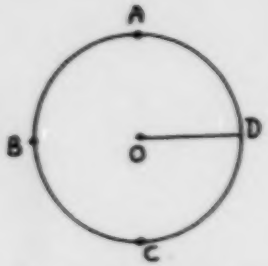
7) Sur la droite réelle, dire entre quels entiers est situé:

a) π b) $7\pi/4$ c) $-\pi/2$

d) $-\pi/4$ e) $5\pi + \frac{\pi}{2}$ f) $\frac{5\pi}{6}$

g) $\frac{8\pi}{3}$

8)



Soit C l'ensemble des points d'un cercle divisé en quatre arcs égaux. La longueur de la circonférence étant 2π, si on enroule la droite réelle sur le cercle à partir de O, trouve:

a) A quel nombre réel (exprimé en termes de π) correspond chacun des points A, B, C et D.

b) Marque le milieu des arcs donnés par les points E, F, G, H et indique à quel nombre réel (en fonction de π) correspond E, F, G et H.

c) Marque le milieu des arcs, formés jusqu'ici, par les points I, J,... et indique à quel nombre réel (en fonction de π) correspond I, J, K, L, M, N, P, Q.

d) Entre quels points se situe $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.2) DETERMINER la relation entre la mesure d'un angle et celle de l'arc ou des arcs interceptés par cet angle.	PAGE: 15

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITÉ 3: LA MESURE D'UNE LONGUEUR D'ARC

L'enseignant propose aux élèves le problème suivant:

«On est en train de préparer le terrain pour le lancer du poids à la Polyvalente Hyacinthe-Delorme, pour les olympiades annuelles.
Voici le schéma de l'aire de lancement:

Suggestion: utiliser une acétate pour présenter le problème!

On doit y installer un rebord de bois (planche d'arrêt), pour empêcher les athlètes de dépasser le cercle lors de leur projection vers l'avant.
Ce rebord de bois a 11,43cm de large. L'angle θ formé par les extrémités de cette pièce de bois est de 1,14 rad. Le rayon intérieur est de 106,68cm.
Quelle doit être la longueur intérieure et extérieure de cette planche d'arrêt?»

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.2)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant laisse les élèves proposer des solutions et découvrir eux-mêmes la formule, en utilisant des proportions.

Par la suite, l'enseignant résume la théorie en regard de la mesure d'un arc, lorsque l'on connaît la mesure du rayon du cercle et l'angle du centre.

Soit à évaluer la longueur de $\overset{\frown}{AB}$ (arc AB),
avec $\overline{OA} = \overline{OB}$ = rayon r.

RAPPEL

1) Un angle au centre en degrés a la même mesure que l'arc compris entre ses côtés.
2) La circonférence d'un cercle = $2\pi r$

Cela nous permet d'écrire que le rapport des arcs de cercle est égal au rapport des angles au centre:

$$\frac{\text{Longueur } \overset{\frown}{AB}}{2\pi r} = \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$$

D'où longueur $\overset{\frown}{AB} = \dfrac{2\pi r\,\theta^\circ}{360^\circ}$

r est le rayon
θ angle au centre en degré.

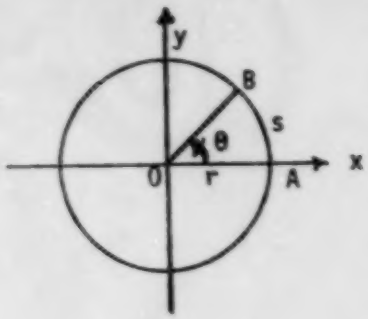
EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Lorsque l'angle au centre est exprimé en radians, on peut déduire une formule simple qui relie l'angle au centre, le rayon et la mesure de l'arc.

Soit: s = longueur $\overset{\frown}{AB}$

$\overline{OA} = \overline{OB} = r$



RAPPEL

L'angle au centre de 360° vaut 2π radians

$C = 2\pi r$

Sachant que le rapport des angles au centre est égal au rapport des arcs de cercle compris entre les côtés de ces angles:

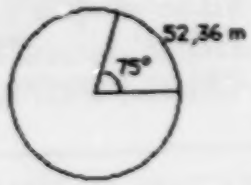
$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{S}{2\pi r} \quad \text{d'où} \quad S = \frac{2\pi r \theta}{2\pi}$$

$$S = r\theta$$

EXERCICES ET REFERENCES

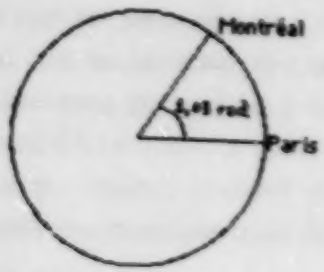
Il n'est pas essentiel que les élèves apprennent les formules par coeur, mais il est important qu'ils comprennent bien la situation en termes de rapports et proportions.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	Exercices 1) Déterminer la mesure en radians d'un angle au centre qui intercepte un arc de longueur «s» dans un cercle de rayon «r» où: a) s = 7 cm, r = 5 cm b) s = 3 cm, r = 5 cm c) s = 4 cm, r = 4 cm 2) Trouver la longueur des arcs déterminés par un angle au centre «t» dans un cercle de rayon «r» où: (t en radians, r en cm) a) r = 5; t = 0,2 b) r = 5; t = $\pi/4$ c) r = 5; t = 2 d) r = 5; t = $\pi/6$ e) r = 10; t = 2,7 f) r = 12; t = 3,4

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	Problèmes 1) Un volant fait 35 tours par seconde, quel temps mettra-t-il pour tourner d'un angle de 5 rad? 2) La grande aiguille d'une horloge a 72 cm de longueur. Quelle distance en centimètres, son extrémité parcourra-t-elle en 20 minutes? 3) Une biche est attachée à un poteau au moyen d'une corde. Lorsque la corde est bien tendue, la biche à l'extrémité de la corde parcourt 52,36 m et l'angle engendré par son déplacement est de 75°. Quelle est la longueur de la corde? 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.2)	PAGE: 20
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

4) Détermine le rayon terrestre si la distance séparant Montréal de Paris est de 6576 km et l'angle au centre de la terre est de 1,03 rad.



5) Si le diamètre d'une roue de bicyclette est de 43 cm; trouver la vitesse en kilomètres par heure du cycliste lorsque la roue de la bicyclette tourne d'un angle de 20 rad par seconde.

6) Quelle est la distance entre Liberville (Afrique) et Guayaguil (Amérique du Sud) sachant le rayon terrestre égal à $6{,}38 \times 10^6$ m et l'angle au centre de la terre égal à 1,37 rad?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

7) Un astronome veut connaître la distance parcourue par une étoile. Il a effectué une première observation en A et une seconde en B
Etant le centre d'un cercle passant par ces 2 étoiles il connaît la distance de lui aux étoiles obtenue en observant la lumière; cette distance est de $5{,}82 \times 10^{40}$ m.
Connaissant l'angle $\theta = 0{,}9$ rad par la visée de son télescope, quelle est cette distance d?

8) Un satellite voyage sur une orbite circulaire à 1600 km au-dessus de la surface de la terre. S'il complète une orbite à chaque 2 h, trouve sa vitesse approximative en km/sec. (Le rayon de la terre est approximativement de 6400 km).

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

9) Une courbe d'autoroute en forme d'arc de cercle mesure 0,4 km. Le parcours de l'autoroute change de 45° entre les deux extrémités de la courbe. Trouve, en mètres le rayon du cercle qui sous-tend cette courbe.

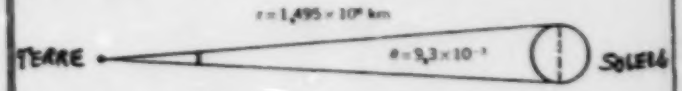
10) Une courbe d'autoroute ayant la forme d'un arc de cercle mesure 152 m. Le rayon du cercle qui sous-tend la courbe mesure 762 m. Trouve en degrés le changement de direction de l'autoroute.

11) Quand tu regardes la lune, tu regardes un objet situé à $3,86 \times 10^8$ m de toi. L'angle θ illustré sur le dessin est de 0,0090 rad. Trouve le diamètre approximatif de la lune. (On assume que le diamètre de la lune est approximativement égal à la longueur de la corde AB).

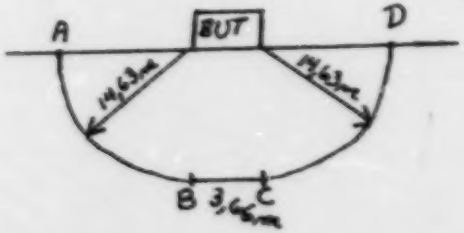
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

12) La distance de la terre au soleil est d'environ $1{,}495 \times 10^{8}$ km. Vu de la terre, le soleil sous-tend un angle d'environ $9{,}3 \times 10^{-3}$ radians. Comme le diamètre du soleil est très petit en comparaison de sa distance de la terre, la longueur L de l'arc sous-tendu donne une excellente approximation du diamètre du soleil. Calcule le diamètre approximatif du soleil.



13) Voici le dessin de la zone des buts au hockey sur gazon.
On doit installer un ruban qui part de A et se rend à D, en passant par B et C.
Quelle sera la longueur de ce ruban?



SECTION 2

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

BLOC 2

OBJECTIFS 2.3.3

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.3) DÉFINIR la fonctions d'enroulement sur un cercle centré à l'origine de rayun un.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITE 1 LA CONSTRUCTION DU TRIGONOGRAPHE

L'activité devrait être amorcée quelques jours avant sa tenue, en demandant aux élèves de préparer la construction désirée:

Directives

- coller un objet circulaire (carton épais, disque en bois, etc) sur un carton épais et rigide (ou une pièce de bois assez mince)

  EXEMPLE: un carton épais de 10cm sur 30cm et disque de 5cm de diamètre.

- fixer sur le carton épais et sous le disque (au centre du disque) une ficelle rigide (non élastique) ou un fil de métal d'une longueur d'au moins 8 fois le diamètre du disque

- apporter en classe un crayon feutre rouge et un crayon feutre noir (pointe fine)

L'élève devrait arriver en classe avec un objet qui ressemble à peu près à ceci:

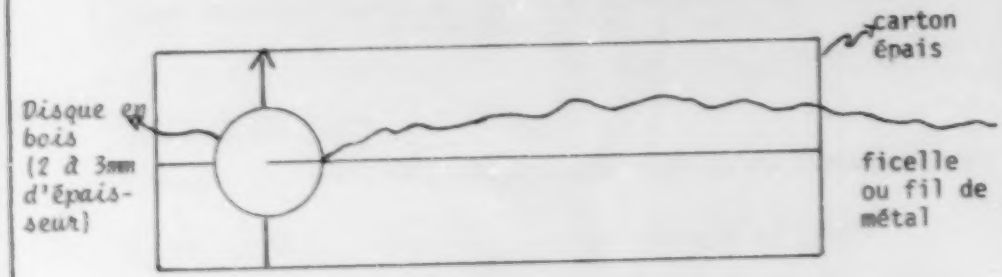
EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant devra avoir en main son propre trigonographe pour illustrer sa démarche.

La largeur du carton devrait être environ 2 fois plus grande que le diamètre du disque.
La longueur du carton devrait être environ 6 fois le diamètre du disque

L'enseignant devrait en avoir quelques uns à sa disposition pour pallier à toute éventualité

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE



Ce trigonographe servira à présenter et à exploiter la fonction d'enroulement, et plus tard, il servira à tracer la courbe de la fonction «sinus».

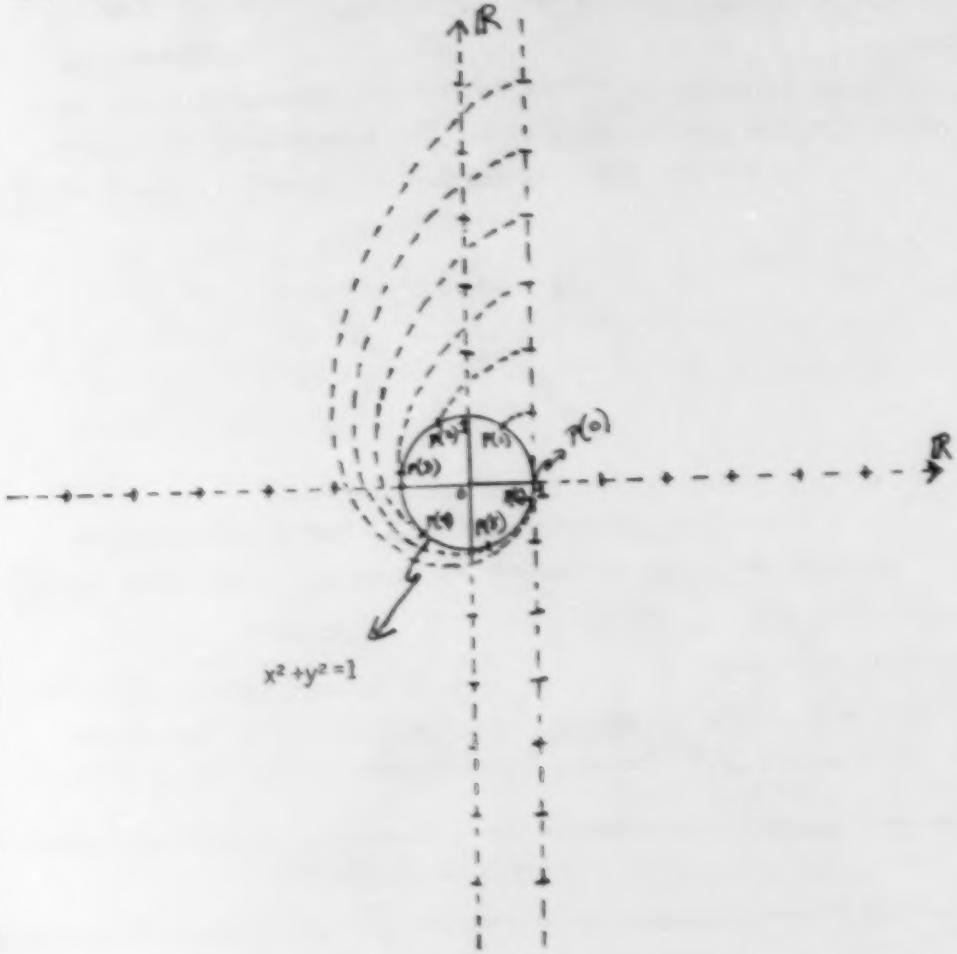
EXERCICES ET REFERENCES

Il serait fort utile d'avoir adéquatement collé un papier millimétrique sur le carton rigide.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Prenons pour acquis que le cercle (disque) collé sur le trigonographe, a un rayon égal à 1. On appelle ce cercle un cercle trigonométrique.	*Il s'agit ici d'explorer les effets d'enroulement sur un cercle centré à l'origine et de rayon 1*
① Le cercle étant unitaire, on demande aux élèves de reporter la longueur du rayon sur la droite des réels.	*A l'aide du compas, ou...*
	Indiquer les nombres au-dessus de la droite des réels
② On gradue la ficelle en longueur de rayons (de 1 à 7). L'élève enroule ensuite la ficelle (dans le sens positif) autour du disque et marque d'un point sur le disque les longueurs de rayons obtenues.	*Utiliser le crayon feutre rouge*
Faire à nouveau constater aux élèves qu'il y a un peu plus de 6 fois le rayon autour du cercle et amener les élèves à dégager que cela correspond à 2π.	→ On obtient les points P(1), P(4), ..., P(6).

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

3 Analyser le graphique ci-dessous.



EXERCICES ET REFERENCES

Le cercle est centré à l'origine et son rayon est égal à 1

N.B. Cette droite numérique est tangente au cercle-unité au point P(o), le point de départ.

Cette droite numérique est flexible et elle peut s'enrouler autour du cercle-unité comme un fil autour d'une bobine.

La droite n'ayant pas d'épaisseur et étant illimitée, on peut parcourir le cercle un nombre illimité de fois.

$C = 2\pi r$ et $r = 1$

donc: $C = 2\pi$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

(4) On reprend le trigonographe, on enroule la ficelle, on marque en bleu la longueur 2π et on reporte cette longueur sur la droite des réels.

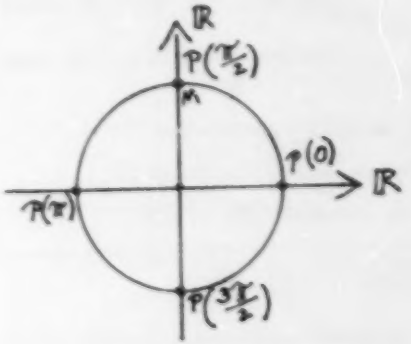
On fait de même avec π, $\frac{\pi}{2}$ et $3\frac{\pi}{2}$

Ne pas oublier de noter ces longueurs sur le cercle trigonométrique.

On sait que: $S = r\,\theta$
Dans le cas du cercle trigonométrique, $S = \theta$
On peut donc considérer la mesure d'un angle au centre comme étant égal à la mesure de l'arc intercepté par cet angle au centre.

car r = 1

Comme la circonférence vaut 2π; si je veux savoir quel est le trajet parcouru du point P(0) au point M,



je devrai partager la longueur de la circonférence 2π en 4 parties égales, d'où $2\pi/4 = \pi/2$; on aura $P(\pi/2)$ et sachant que π vaut approximativement 3,1416, on aura 1,5708....
Ce point est bien situé entre 1 et 2.
$P(1,5708) \approx P(\pi/2)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Note: On emploi en Trigonométrie la valeur exacte: donc $\frac{\pi}{2}$.

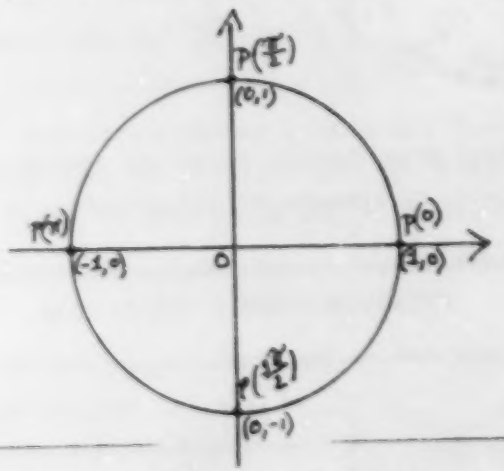
De la même manière nous aurons:

$P(3,1416) \simeq P(\pi)$ car $P(\frac{2\pi}{2}) = P(\pi)$

et $P(4,7124) \simeq P(\frac{3\pi}{2})$

Et les points principaux sur le cercle sont:

- P(0) qui a pour coordonnées (1,0)
- P(π/2) qui a pour coordonnées (0,1)
- P(π) qui a pour coordonnées (-1,0)
- P(3π/2) qui a pour coordonnées (0,-1)



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 2 LA FONCTION D'ENROULEMENT

L'enseignant définit la fonction d'enroulement en utilisant le vocabulaire approprié:

1) $P(0) = (1,0)$ ou $\mathcal{E}(0) \longmapsto (1,0)$

2) si $t \in \mathbb{R}_+$, $P(t)$ est le point du cercle obtenu à t unités, en enroulant $\mathbb{R}$ sur le cercle à partir du point (1,0) dans le sens anti-horaire.

3) si $t \in \mathbb{R}_-$, $P(t)$ est le point du cercle obtenu à t unités, en enroulant $\mathbb{R}$ sur le cercle à partir du point (1,0) dans le sens horaire.

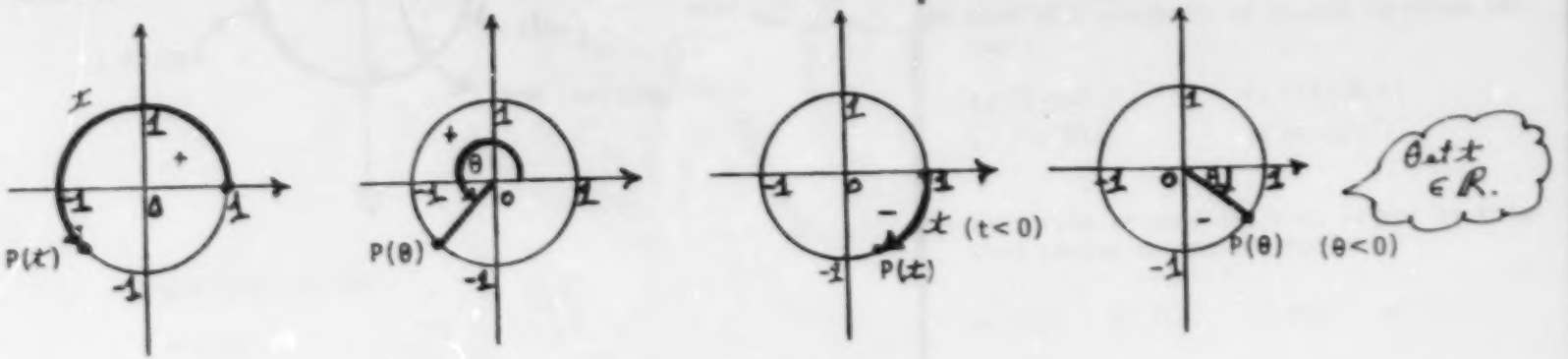
La fonction d'enroulement $\mathcal{E}$ est donc une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Montrer aux élèves qu'on a une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, qu'à tout nombre réel, je fais correspondre un couple.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Le point auquel on aboutit est appelé un point trigonométrique. L'enseignant définit le point trigonométrique: c'est le point auquel on aboutit: 1) lorsqu'on s'est déplacé de «t» unités le long de la circonférence du cercle trigonométrique, 2) en prenant comme point de départ le point (1,0), 3) en se déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre si «t» est négatif et dans le sens anti-horaire, si «t» est positif. Définition: Un point est dit trigonométrique s'il appartient au cercle C; autrement dit, l'équation $X^2 + y^2 = 1$ doit être vérifiée pour ce point.	

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

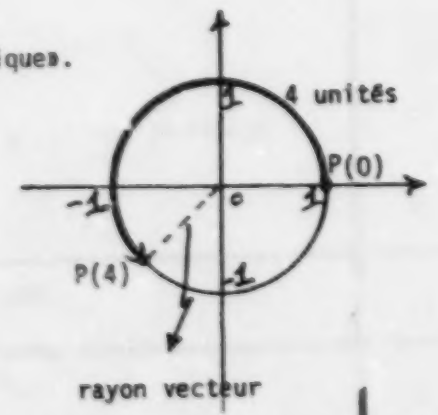
EXEMPLES:



A chaque nombre réel, correspond un point trigonométrique.

L'enseignant propose le problème suivant:

«Situe le point trigonométrique P(4) sur le cercle trigonométrique».



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant propose cet autre problème:

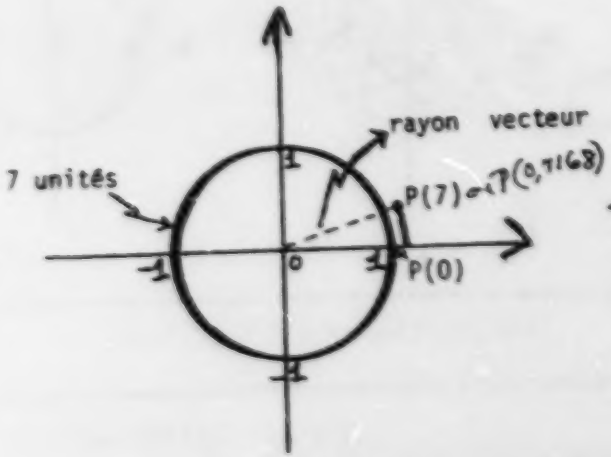
«Situe le point trigonométrique P(7), sur le cercle trigonométrique».

P(7) est le point auquel on aboutit en partant de P(0) et en parcourant 7 unités dans le sens anti-horaire, car 7 est positif.

Or, la circonférence totale est égale à:

$C = 2\pi r$

$C \simeq 6,2832$ unités



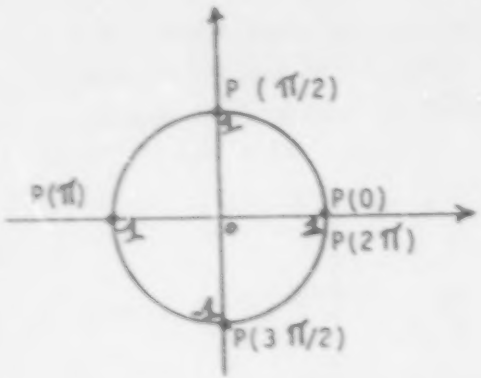
Donc, si on parcourt 7 unités, on fait une fois le tour du cercle + 0,7168

7,0000 - 6,2832 = 0,7168

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	EXERCICES 1) Dans quel quadrant se trouve le rayon vecteur: a) P(-315°) c) P(13π/6) b) P)2π/3) d) P(-620°) 2) Détermine le quadrant dans lequel se trouvent chacun des points suivants: a) P(2) b) P(5) c) P(8) d) P(17) 3) Sur le cercle trigonométrique, dis entre quels entiers est situé: a) P(π) b) P(7 π/4) c) P(- π/2) d) P(- π/4) e) P(5π - π/2) 4) Situe les points suivants sur un cercle trigonométrique: a) $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ b) $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$ c) $P\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ d) $P-\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ e) $P-\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ f) $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ g) $P\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$ h) $P\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ i) $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ j) $P\left(\pi - 1\frac{\pi}{3}\right)$ k) $P\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ l) $P\left(-\frac{12\pi}{3}\right)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
L'enseignant pose ensuite cette autre question: «Quelles sont les coordonnées d'un point trigonométrique donné? et comment peut-on situer un point trigonométrique?»	5) A quelle condition un point P(x,y) est-il situé sur le cercle trigonométrique? 6) Parmi les points suivants du plan cartésien, détermine ceux qui sont situés sur le cercle trigonométrique? a) (0,0) b) (0,1) c) (1,-1) d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e) (-1,0) f) $(\frac{1}{2}, \sqrt{2})$ g) $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ 7) On donne la coordonnée x ou y d'un point situé sur le cercle trigonométrique, trouve l'autre (en valeur positive). a) x = 3/5 b) y = 5/13 c) x = $\sqrt{3}/2$ d) x = - 8/17 8) etc..

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE



L'élève connaît déjà les coordonnées de:

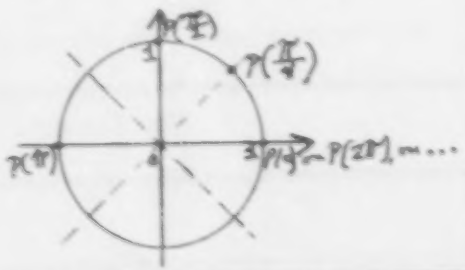
$P(0) = (1,0)$
$P(\pi/2) = (0,1)$
$P(\pi) = (-1,0)$
$P(3\pi/2) = (0,-1)$
$P(2\pi) = (1,0)$

L'enseignant pose la question suivante:

«Comment peut-on situer le point $P(\frac{\pi}{4})$ sur le cercle trigonométrique?»

Il suffit de séparer le cercle en 8 arcs congrus, soit

$$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$



EXERCICES ET REFERENCES

C'est un rappel.

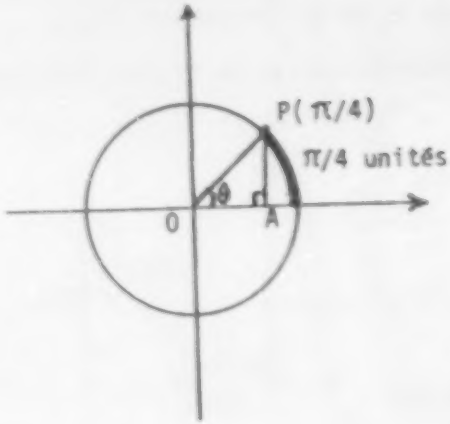
L'élève doit être capable de retrouver ces coordonnées.

Parler de périodicité.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Autre question:

«Comment peut-on calculer les coordonnées du point $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$?»



Si, à partir du point P, j'abaisse une perpendiculaire sur l'axe des x, je forme un triangle rectangle OAP, rectangle en A.

Sachant que $\pi/4$ dans le système circulaire correspond à 45° dans le système sexagésimal, on a alors l'angle $\theta = 45^\circ$ et l'angle P égale aussi 45°, et le rayon vecteur OP = 1, c'est le rayon du cercle trigonométrique.

OA = x, se trouvant sur l'axe des x.

AP = y, se trouvant sur une parallèle à l'axe des y

Expliquer clairement cette relation!

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Par la relation de Pythagore, on a:

$x^2 + y^2 = 1$

$x^2 + x^2 = 1$ (car $x = y$)

$2x^2 = 1$

$x^2 = 1/2$

$x = \pm\sqrt{1/2}$ et $x = \pm\sqrt{\frac{2}{2}}$

Expliquer cette autre relation en la reliant à l'équation générale d'un cercle centré à l'origine et dont le rayon est égal à 1

Donc: $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ (car $x = y$)

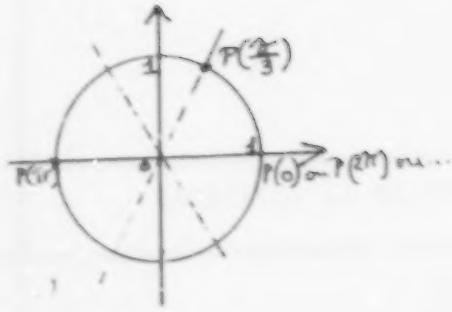
Comme, dans le premier quadrant, $x>0$ et $y>0$, les coordonnées de $P(\frac{\pi}{4})$ sont $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

Autre question

«Comment peut-on situer le point $P(\frac{\pi}{3})$ sur le cercle trigonométrique?»

Il suffit de séparer le cercle en 6 arcs congrus soit

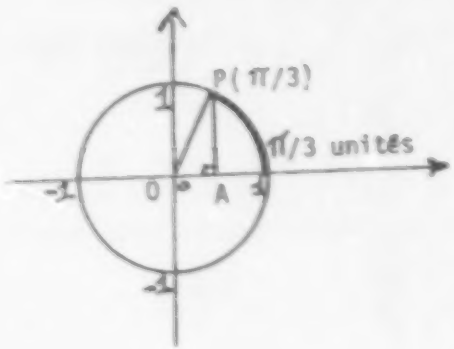
$$\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Autre question

Quelles sont les coordonnées de P $\left(\frac{\pi}{3}\right)$?



On sait que: $2\pi/6 = \pi/3$, la circonférence est séparée en 6 parties égales et $\pi/3 = 60^\circ$

$\triangle$ OAP est rectangle en A

$\angle$ O = 60°

$\angle$ P = 30°

OP = 1 (rayon)

OA = 1/2 = 1/2 du rayon

(dans un triangle rectangle, le côté opposé à un angle de 30° est égal à la moitié de l'hypothénuse).

Et x = 1/2 (abscisse du point P($\pi/3$))

Par la relation de Pythagore, on trouve que:

$(\overline{OA})^2 + (\overline{AP})^2 = (\overline{OP})^2$

$(1/2)^2 + y^2 = 1$

$1/4 + y^2 = 1$

$y^2 = 1 - 1/4$

$y^2 = 3/4$

Et $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Dans le 1er quadrant, x 0 et y 0)(ordonnée du point P $\left(\frac{\pi}{3}\right)$)

Les coordonnées de P($\frac{\pi}{3}$) sont donc

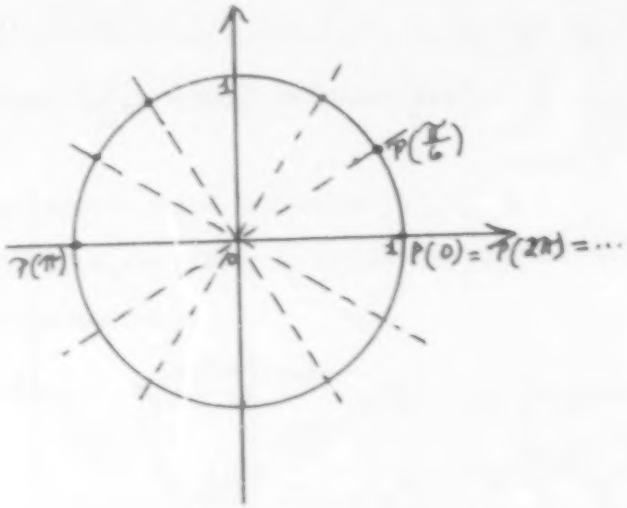
$(1/2, \frac{\sqrt{3}}{2})$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Autre question

«Comment peut-on situer le point $P(\frac{\pi}{6})$ sur le cercle trigonométrique?»

L'élève devrait déduire que la circonférence sera partagée en 12 arcs congrus.



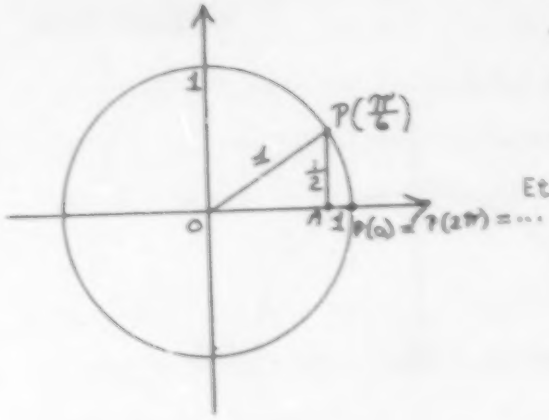
Autre question

«Quelles sont les coordonnées de $P(\frac{\pi}{6})$?»

L'enseignant demande aux élèves de le découvrir par eux-mêmes.

Après un certain temps (?), l'enseignant intervient en concluant et en généralisant.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES



△OAP est rectangle en A

∠O = 30°

∠P = 60°

OP = 1 (c'est le rayon)

AP = 1/2 (c'est la moitié du rayon)

Et y = 1/2 (ordonnée du point $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$)

Par la relation de Pythagore, on trouve que:

$(\overline{OA})^2 + (\overline{AP})^2 = (\overline{OP})^2$

$x^2 + (1/2)^2 = 1$

$x^2 = 1 - 1/4$

$x^2 = 3/4$

Et $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (abcisse du point $P\left(\frac{\pi}{6}\right)$)

(Dans le 1er quadrant, $x>0$ et $y>0$)

Les coordonnées de $P(\frac{\pi}{6})$ sont donc

$(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1/2)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

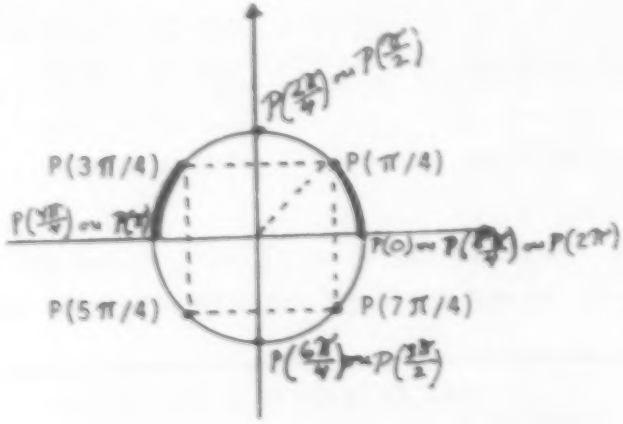
ACTIVITE 4: LES COORDONNÉES DES POINTS QUI SONT DES MULTIPLES DE $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, ET $\frac{\pi}{6}$.

« Si on connaît bien les coordonnées de $P(\frac{\pi}{4})$, $P(\frac{\pi}{3})$, et $P(\frac{\pi}{6})$, on peut en trouver facilement toutes les coordonnées des points $P(n \cdot \frac{\pi}{4})$, $P(n \cdot \frac{\pi}{3})$ et $P(n \cdot \frac{\pi}{6})$. »

$n \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$

L'enseignant choisit les multiples de $\frac{\pi}{4}$.

Il demande d'abord aux élèves de situer les points $P(n \cdot \frac{\pi}{4})$ sur le cercle trigonométrique.



Profiter de l'occasion pour placer ces points sur le trigonographe.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant demande ensuite aux élèves de déduire les coordonnées de ces points $P(n \cdot \frac{\pi}{4})$ en tenant compte des remarques suivantes:

- l'image d'un point (x,y) par la réflexion d'axe y est (-x,y).
- l'image d'un point (x,y) par la réflexion d'axe x est (x,-y).

ne pas oublier de parler de périodicité

n est un entier $n \in \mathbb{Z}$

Utiliser au moins $n \leq 9$ et $n \geq -9$

Puisque la circonférence du cercle-unité est 2π, la fonction f est périodique, de période 2π.

si $0 \leq t < 2\pi$, on a:
$P(t + 2\pi n) = P(t)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXEMPLE:

$P(1 \cdot \pi/4) = P(\pi/4) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P(2 \cdot \pi/4) = P(\pi/2) = (0,1)$

$P(3 \cdot \pi/4) = P(3\pi/4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P(4 \cdot \pi/4) = P(\pi) = (-1,0)$

$P(5 \cdot \pi/4) = P(5\pi/4) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$

$P(6 \cdot \pi/4) = P(3\pi/2) = (0,1)$

$P(7 \cdot \pi/4) = P(7\pi/4) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$

$P(8 \cdot \pi/4) = P(8\pi/4) = P(2\pi) = (1,0)$

$P(9 \cdot \pi/4) = P(9\pi/4) = P(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

•
•
•

EXERCICES ET REFERENCES

Faire réaliser aux élèves que, si l'on utilise des nombres négatifs, on aboutit aux mêmes points:

Ex: $P(-\frac{\pi}{4}) = P(7\frac{\pi}{4})$

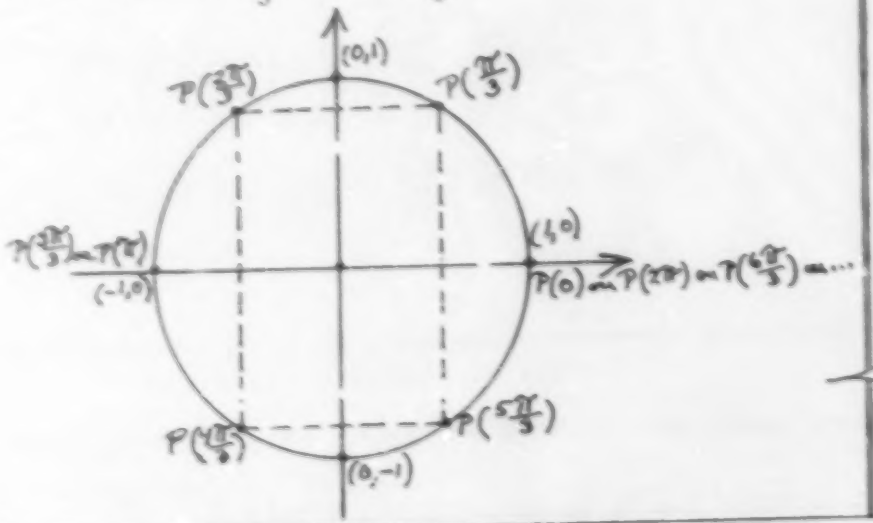
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

On retrouve donc 4 points importants de $\pi/4$

Points importants:	$P(\pi/4)$	$P(3\pi/4)$	$P(5\pi/4)$	$P(7\pi/4)$
quadrants:	1er	2e	3e	4e
signes:	(+ , +)	(- , +)	(- , -)	(+ , -)
coordonnés:	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

Rappeler les signes des coordonnées dans chacun des quadrants

L'enseignant demande ensuite aux élèves de faire le même cheminement avec $P(m \cdot \frac{\pi}{3})$ et $P(m \cdot \frac{\pi}{6})$.



Si l'élève demande où est $P(2\frac{\pi}{4})$? On ne considère que les nouveaux points, car la simplification (réduction), ça existe!

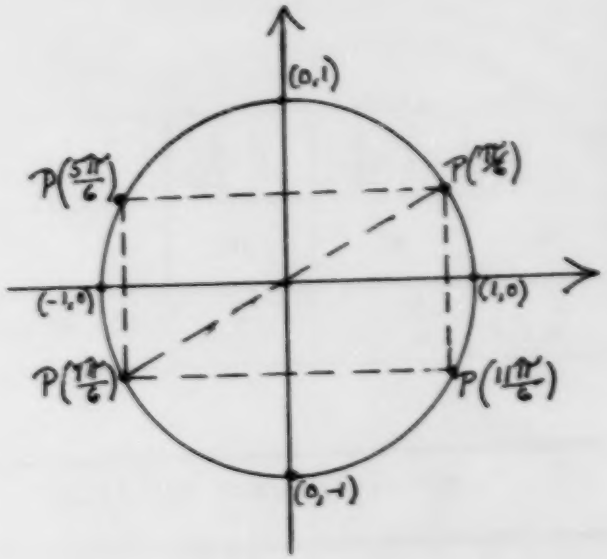
Profiter de l'occasion pour situer ces points sur le trigonographe.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Points importants	$P(\pi/3)$	$P(2\pi/3)$	$P(4\pi/3)$	$P(5\pi/3)$
Quadrants	1er	2e	3e	4e
Coordonnées:	$(1/2, \sqrt{3}/2)$	$(-1/2, \sqrt{3}/2)$	$(-1/2, -\sqrt{3}/2)$	$(1/2, -\sqrt{3}/2)$

Qu'arrive-t-il avec $3\frac{\pi}{3}$ et $6\frac{\pi}{3}$?

Faire le même cheminement avec $P(n \cdot \frac{\pi}{6})$.



Il est évident que les points $P(n \cdot \frac{\pi}{6})$ rejoignent plusieurs points déjà calculés et 4 nouveaux points.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Points importants de $\pi/6$	$P(\frac{\pi}{6})$	$P(5\frac{\pi}{6})$	$P(7\frac{\pi}{6})$	$P(11\frac{\pi}{6})$
Quadrants	1er	2e	3e	4e
Coordonnées	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

EXERCICES ET REFERENCES

Qu'arrive-t-il avec $2\frac{\pi}{6}$, $3\frac{\pi}{6}$, etc. ?

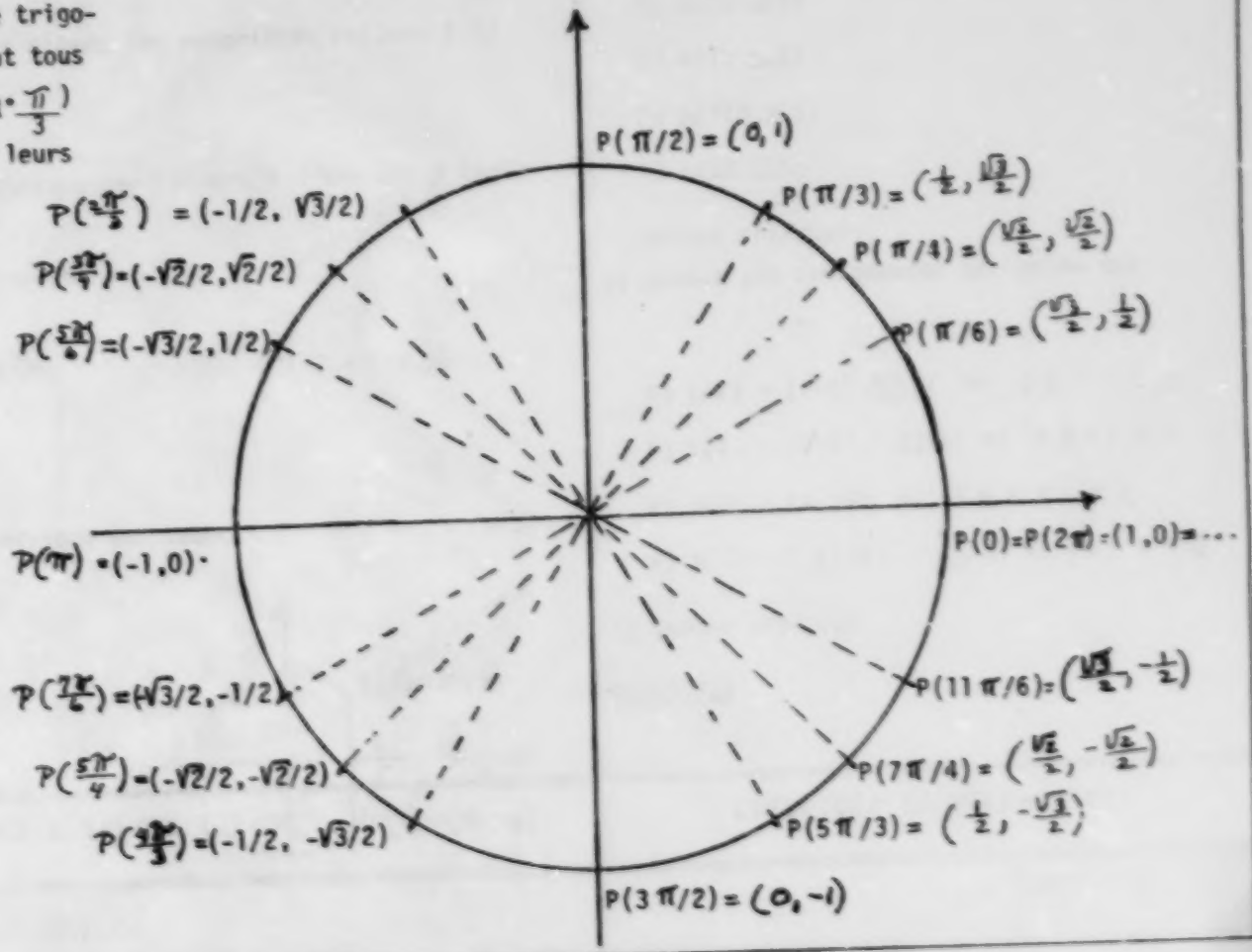
Ne pas oublier d'inscrire ces points (nouveaux) sur le trigonographe.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.3)	PAGE: 25

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE SYNTHESE

L'enseignant demande à l'élève de construire son cercle trigonométrique en y indiquant tous les points $P(n \cdot \frac{\pi}{4})$, $P(n \cdot \frac{\pi}{3})$ et $P(n \cdot \frac{\pi}{6})$, ainsi que leurs coordonnées.



OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.3)	PAGE: 26

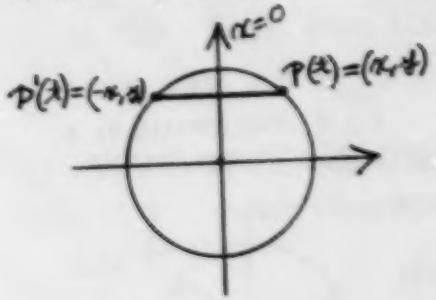
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	Exercices 1) Trouve «t», si: a) $P(t) = (\sqrt{2}/2 , -\sqrt{2}/2)$ et $0 \leq t \leq 2\pi$ b) $P(t) = (0,-1)$ et $2\pi \leq t < 4\pi$ c) $P(t) = (1/2, -\sqrt{3}/2)$ et $-2\pi < t \leq 0$ d) $P(t) = (1/2, \sqrt{3}/2)$ et $0 \leq t < 2\pi$ 2) Trouve les coordonnées de chacun des points suivants: a) $P(25\ \pi/2)$ b) $P(-19\ \pi/2)$ c) $P(17\ \pi/3)$ d) $P(13\ \pi/4)$ e) $P(21\ \pi/6)$ f) $P(-19\ \pi/6)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 5: LES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION D'ENROULEMENT

L'enseignant rappelle aux élèves les propriétés reliées à la symétrie dans le cercle.

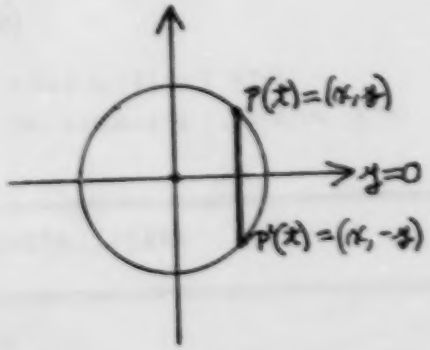
a) P(t) = (x,y) est symétrique par rapport à l'axe des y (x=0)



ainsi P'(t) = (-x,y)

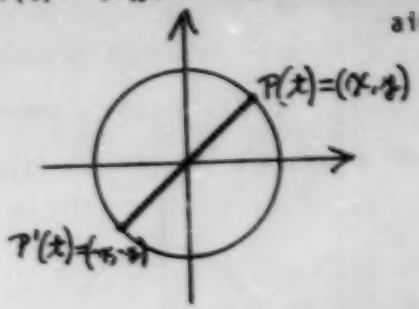
b) P(t) = (x,y) est symétrique par rapport à l'axe des x (y=0)

ainsi P' (t) = (x,-y)

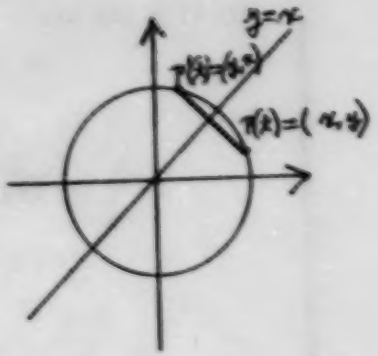


ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

c) P(t) = (x,y) est symétrique par rapport à l'origine (0,0)
ainsi P'(t) = (-x,-y)



d) P(t) = (x,y) est symétrique par rapport à la bissectrice: x = y
ainsi: P'(t) = (y,x)



A l'aide du cercle trigonométrique (cf p. 25), faire constater que les relations précédentes sont vraies.

Dans les cas a), b) et c) c'est une question de <u>signes</u>!

Dans le cas d), les coordonnées s'inversent!

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Les constatations précédentes permettent d'observer certaines propriétés qui seront utiles dans le calcul des fonctions trigonométriques.

a) si $P(t) = (x,y)$, alors $P(t + \frac{\pi}{2}) = (-y, x)$

b) si $P(t) = (x,y)$, alors $P(t + \frac{3\pi}{2}) = (y, -x)$

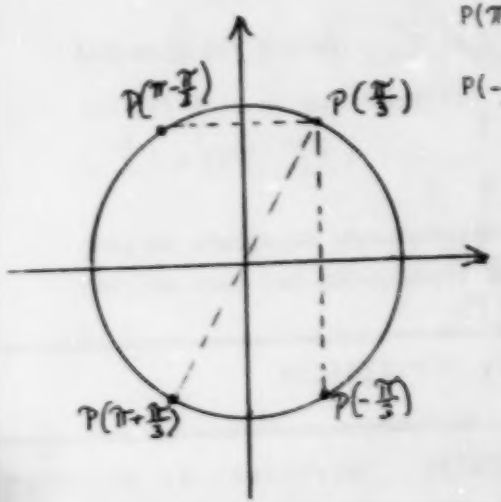
c) si $P(t) = (x,y)$, alors $P(t + 2\pi) = (x,y)$

L'enseignant présente les problèmes suivants:

Soit $P(\frac{\pi}{3})$, où est situé $P(\pi + \frac{\pi}{3})$

$P(\pi - \frac{\pi}{3})$

$P(-\frac{\pi}{3})$



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Quelles sont les coordonnées de chacun des points trouvés?
Quelles symétries retrouve-t-on ici?

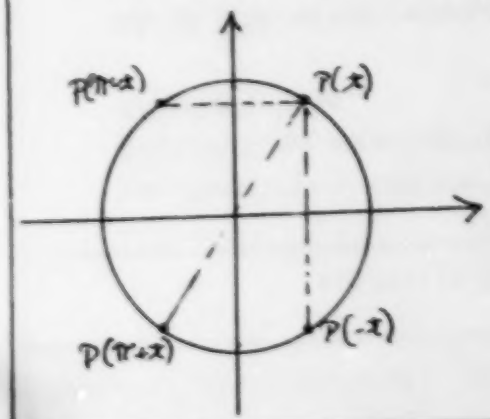
$P(\frac{\pi}{3}) = (1/2, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$P(\pi + \frac{\pi}{3}) = (-1/2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ → *Symétrie par rapport à l'origine*

$P(\pi - \frac{\pi}{3}) = (-1/2, \frac{\sqrt{3}}{2})$ → *Symétrie par rapport à l'axe des y*

$P(-\frac{\pi}{3}) = (1/2, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ → *Symétrie par rapport à l'axe des x.*

L'enseignant présente les problèmes suivants:
Soit P(t), un point quelconque situé dans le premier quadrant;



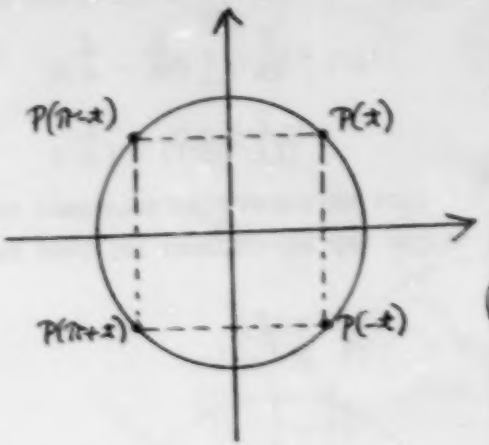
où est situé $P(\pi + t)$
$P(\pi - t)$
$P(-t)$

Quelles sont les coordonnées de ces points:

$P(t) = (x,y)$
$P(\pi + t) = (-x,-y)$
$P(\pi - t) = (-x,y)$
$P(-t) = (x,-y)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant résume en utilisant le graphique ci-dessous:



$(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$

Faire constater à l'élève que les points $P(\pi - t)$ et $P(\pi + t)$ sont trouvés à partir de π.

Que vaut $P(7\pi + t)$? ou $P(9\pi - t)$? etc...

L'enseignant présente les problèmes suivants:

Soit $P(\frac{\pi}{3})$; où est situé $P(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$?

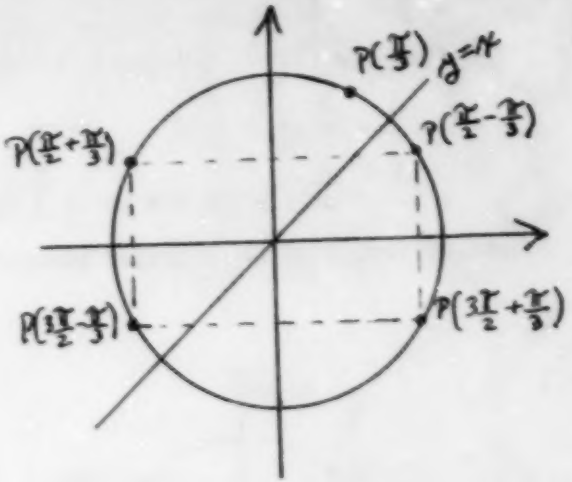
$P(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$?

$P(3\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$?

$P(3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$?

Les points $P(\frac{\pi}{3})$ et $P(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3})$ sont symétriques par rapport à la droite $y=x$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE



Quelles sont les coordonnées des points trouvés?

Quelles symétries retrouve-t-on ici?

$$P(\frac{\pi}{3}) = (1/2, \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$P(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1/2)$$

$$P(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1/2)$$

$$P(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -1/2)$$

$$P(3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -1/2)$$

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

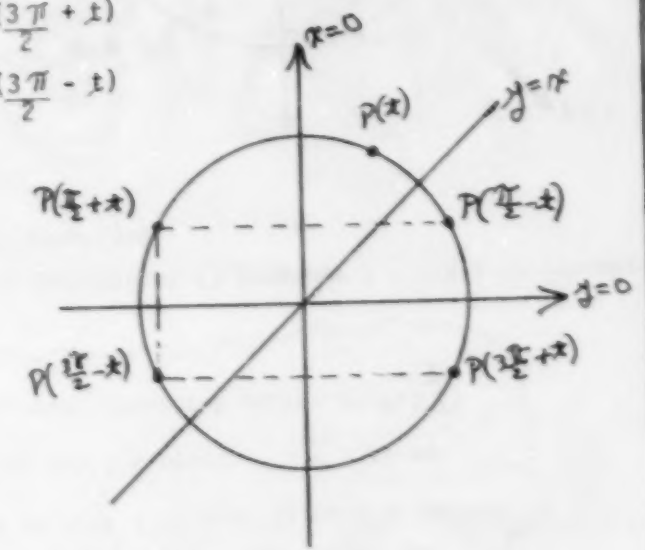
Soit P(t), un point quelconque situé dans le 1er quadrant:

où est situé $P(\frac{\pi}{2} - t)$

$P(\frac{\pi}{2} + t)$

$P(\frac{3\pi}{2} + t)$

$P(\frac{3\pi}{2} - t)$



Si P(t) = (x,y), les coordonnées de

$P(\frac{\pi}{2} - t)$ sont (y,x)

$P(\frac{\pi}{2} + t)$ sont (-y,x)

$P(\frac{3\pi}{2} + t)$ sont (y,-x)

$P(\frac{3\pi}{2} - t)$ sont (-y, -x)

EXERCICES ET REFERENCES

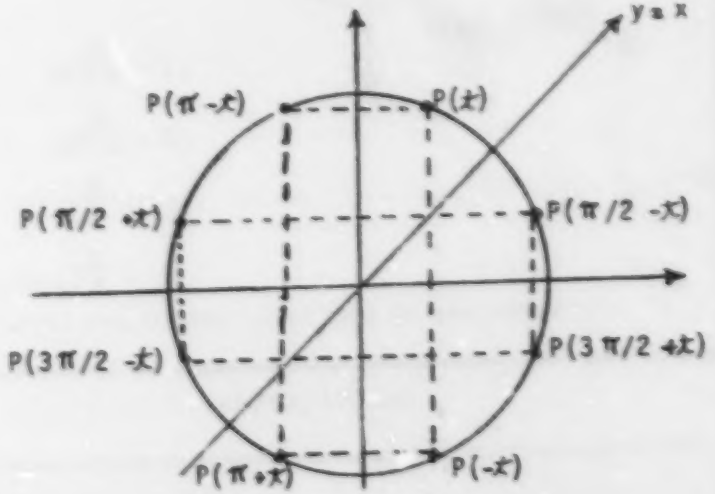
Les points P(t) et $P(\frac{\pi}{2} - t)$ sont symétriques par rapport à la droite y = x.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant résume en utilisant le graphique précédent:

Faire constater à l'élève que les points $P(\frac{\pi}{2} - t)$ et $P(\frac{\pi}{2} + t)$ sont trouvés à partir de $P(\frac{\pi}{2})$ et que les points $P(3\frac{\pi}{2} + t)$ et $P(3\frac{\pi}{2} - t)$ sont trouvés à partir de $P(3\frac{\pi}{2})$

Il serait peut-être intéressant de demander à l'élève de résumer le tout sur un seul graphique.



EXERCICES ET REFERENCES

ne pas oublier que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Si $P(t) = (x,y)$ *alors...*

$P(\pi + t) =$

$P(-t) =$

$P(\pi - t) =$

$P(\pi/2 - t) =$

$P(\pi/2 + t) =$

$P(3\pi/2 - t) =$

$P(3\pi/2 + t) =$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.3)	PAGE: 35

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	Exercices 1. Sachant que les coordonnées de $P(t)$ sont $(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4})$, quelles sont les coordonnées de $P(\pi+t)$ $P(\pi-t)$ $P(-t)$ $P(\frac{\pi}{2}-t)$ $P(\frac{\pi}{2}+t)$ $P(3\frac{\pi}{2}+t)$ $P(3\frac{\pi}{2}-t)$ 2. etc..

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITÉ 6: DOMAINE ET IMAGE DE LA FONCTION D'ENROULEMENT

L'enseignant rappelle la définition de la fonction d'enroulement:

- c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ dans laquelle à tout nombre réel t, je fais correspondre un point (x,y) du cercle trigonométrique.

$P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid P(t) = (x,y)$

Faire constater à l'élève que le domaine de cette fonction est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, car tout nombre réel a son correspondant sur le cercle trigonométrique.

$$\text{Domaine de } P = \mathbb{R}$$

Faire constater à l'élève que l'image de cette fonction est l'ensemble de tous les points (couples)situés sur le cercle trigonométrique

$$\text{Image de } P = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

$x^2 + y^2 = 1$ est l'équation d'un cercle centré à l'origine et de rayon égal à 1

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.3)	PAGE: 37

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'élève a probablement constaté, dans ses activités précédentes que la fonction d'enroulement était périodique (de période 2π)

Autrement dit, l'équation $P(t) = (x,y)$ possède une infinité de solutions de la forme:

$t_i + 2\pi n$ où t_i est une solution dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{Z}$

SECTION 2

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

BLOC 3

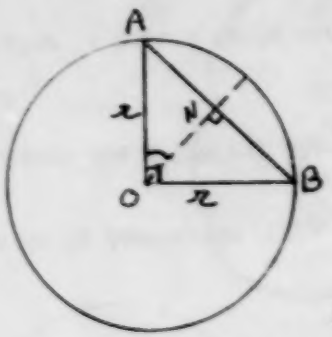
OBJECTIFS 2.3.5

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.5) DÉTERMINER les propriétés de la fonction d'enroulement.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE I: LA MESURE DES DEMI-CORDES

«Comment peut-on calculer la mesure de la corde AB sur la figure suivante?»



$r = 1$

$AN = NB$

Grd AB = 1,4142136

$AB^2 = r^2 + r^2$

$AB^2 = 1^2 + 1^2$

$AB^2 = 2$

$AB = \sqrt{2}$ ou $AB \simeq 1,4142136$

«Quelle est la mesure de la demi-corde AN?»

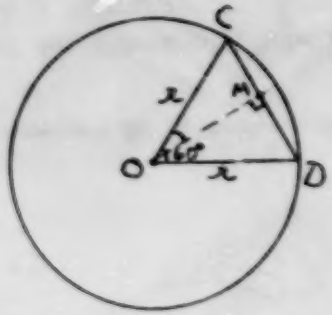
$AB = 1,4142136$

$AN = \frac{AB}{2} \simeq 0,7071068$

Faire remarquer aux élèves que $\angle AON$ est égal à
$(45^\circ \longrightarrow 0,7071068)$

«Comment peut-on calculer la mesure de la corde CD sur la figure suivante?»

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE



r = 1
CM = MD

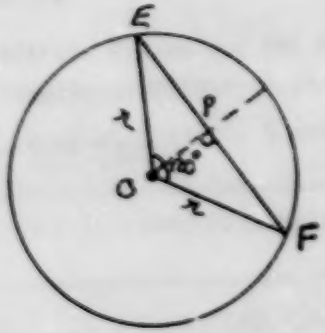
crd CD = 1

«Quelle est la mesure de la demi-corde CM?»

Faire remarquer aux élèves que $\angle$ COM est alors égal à 30°.

($30^\circ \longrightarrow 0,5$)

«Comment peut-on calculer la mesure de la corde EF sur la figure suivante?



r = 1
EP = PF

EXERCICES ET REFERENCES

$\angle DOC = 60^\circ$
OC = OD (ce sont des rayons)
donc $\angle OCD = \angle ODC = 60^\circ$
il s'agit donc d'un triangle équilatéral et
CD = r = 1

CD = 1
CM = 1/2 = 0,5

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Si $\angle EOF = 120^\circ$, alors $\angle EOP = 60^\circ$
on sait que $\angle OPE = 90^\circ$, alors $\angle OEP = 30^\circ$
Donc OP = 1/2 (car le côté opposé, dans un triangle rectangle, à un angle de 30°, est égal à la moitié de l'hypoténuse)

$OE^2 = EP^2 + OP^2$
$1^2 = EP^2 + 1/2^2$
$EP^2 = 1^2 - 1/2^2$
$EP^2 = 1 - 1/4 = 3/4$
$EP = \sqrt{3/4} \simeq 0,8660254$

Aussi, crd EF = 1,7320508
et $EP = \frac{\text{crd EF}}{2} = 0,8660254$

Faire remarquer aux élèves que l'angle est alors de 60°.
($60^\circ \longrightarrow 0,8660254$)

L'enseignant explique aux élèves que les déductions précédentes ont été faites pour la première fois par des Babyloniens, bien avant la naissance de Jésus Christ. C'est en fait Ptolémée (150) qui les mit en pratique et qui en fixa les démonstrations.

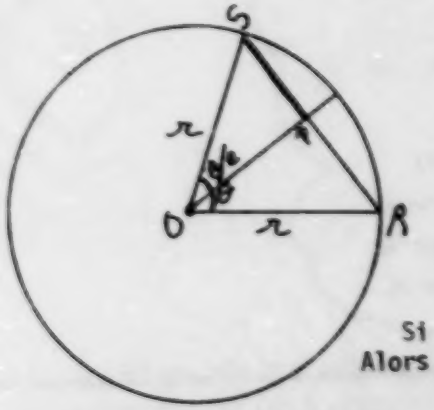
OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.5)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Par la suite, il découvrit différentes lois qui l'amenèrent à trouver la mesure de cordes de différentes longueurs.

L'enseignant utilise les notes historiques pour montrer l'origine de la fonction SINUS. Insister sur l'importance historique de la fonction demi-corde.

L'enseignant utilise la figure ci-dessous pour résumer.



$\text{crd } \theta = \overline{SR}$

$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{SP}}{r}$

Si $r = 1$
Alors $\sin \frac{\theta}{2} = \overline{SP}$

EXERCICES ET REFERENCES

Cela sera vu un peu plus loin!

Insister sur le fait qu'il s'agit d'une fraction d'angle

La longueur de la demi corde varie selon la valeur de l'angle.

C'est la définition historique de la fonction sinus.

Qu'arriverait-il, si r était différent de 1?
EX: Si r = 10, la corde serait d'autant plus grande, mais le rapport $\frac{SP}{r}$ ne changerait pas!

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.5)

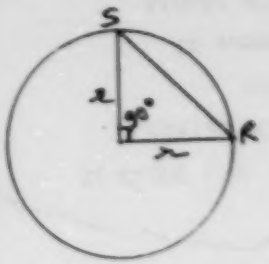
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant utilise quelques rayons différents pour montrer que la valeur de $\frac{SR}{r}$ ne change pas, peu importe la valeur de r.

(Utiliser un angle de 90° et de 60° pour démontrer ce fait)

Si la valeur de SR ne change pas peu importe le rayon, alors la valeur de $\frac{SR}{2}$ ne change pas non plus, et la valeur de la demi-corde (du sinus) est constante.

EXERCICES ET REFERENCES



-Si r = 3, $SR^2 = r^2 + r^2$

$SR^2 = 9 + 9$

$SR^2 = 18$

$SR = 4,2426407$

et $\frac{SR}{3} = 1,4142136$

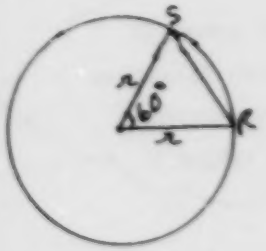
- Si r = 8, $SR^2 = 8^2 + 8^2$

$SR^2 = 64 + 64$

$SR^2 = 128$

$SR = 11,313709$

et $\frac{SR}{8} = 1,4142136$



- Si r = 3, SR = 3

et

$\frac{SR}{3} = 1$

- Si r = 8, SR = 8

et

$\frac{SR}{8} = 1$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Le sinus correspond donc à la mesure de la demi-corde sur la mesure du rayon.

Pour un angle θ, si crd $\theta = \ell$,

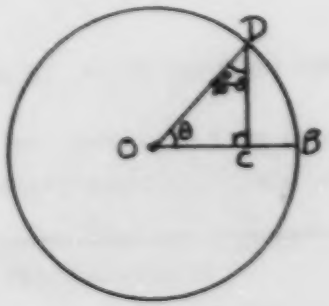
alors $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\ell}{2r}$

$r = 1$, alors $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\ell}{2}$

ACTIVITÉ 2: LE SINUS DU COMPLÉMENT D'UN ANGLE

Historiquement, la deuxième fonction qui fût inventée, fût le «sinus complémentis» (Sinus du complément d'un angle)

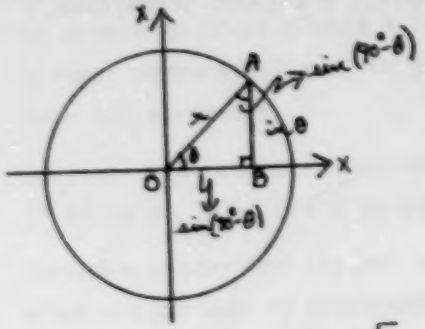
↳ sin ($90^\circ - \theta$)



Si $\angle DOC = \theta$, alors $\angle CDO = 90^\circ - \theta$
car: $\angle OCD = 90^\circ$
et
la somme des trois angles intérieurs d'un triangle est égale à 180°
$\theta + (90^\circ - \theta) + 90^\circ = 180^\circ$

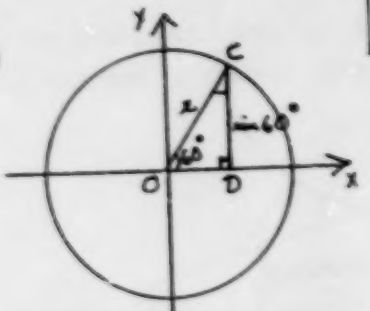
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant peut refaire les mêmes démonstrations que précédemment, selon le type d'élève auquel il doit s'adresser:



$$r^2 = \sin^2\theta + \sin^2(90^\circ - \theta)$$

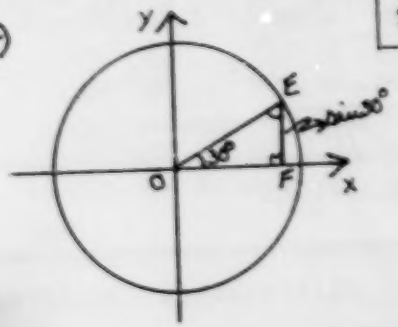
a)



$\left[\text{Si } r = 1 \text{ et } \theta = 60^\circ\right]$

$$1^2 = \sin^2 60^\circ + \sin^2(90^\circ - 60^\circ)$$
$$1 = (0{,}8660254)^2 + \sin^2 30^\circ$$
$$1 = (0{,}8660254)^2 + (0{,}5)^2$$
$$1 = 0{,}75 + 0{,}25$$
$$1 = 1$$

b)



$\left[\text{Si } r = 1 \text{ et } \theta = 30^\circ\right]$

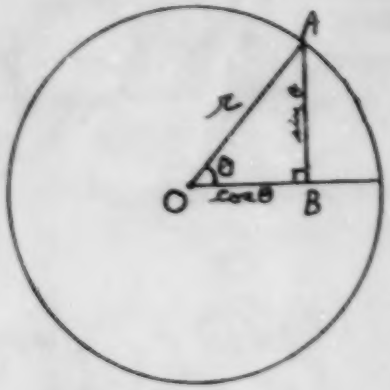
$$1^2 = \sin^2 30^\circ + \sin^2(90^\circ - 30^\circ)$$
$$1 = (0{,}5)^2 + \sin^2 60^\circ$$
$$1 = (0{,}5)^2 + (0{,}8660254)^2$$
$$1 = 0{,}25 + 0{,}75$$
$$1 = 1$$

Discuter de la complémentarité des valeurs obtenues, relativement à la notion d'angles complémentaires

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Historiquement le «sinus complémentaire» est devenu le «cosinus», et $\sin(90^\circ - \theta)$ est devenu $\cos\theta$.

Ex: Si $\theta = 60^\circ$, alors $\sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 30^\circ$



Si $r = 1$

$AB = \sin\theta$,

et

$OB = \cos\theta$.

L'enseignant conclut à l'aide de la relation de Pythagore:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

EXERCICES ET REFERENCES

$\sin 60^\circ = 0{,}8660254$ et ainsi $\cos 30^\circ = 0{,}8660254$

Insister sur la notation «carré»

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.5)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

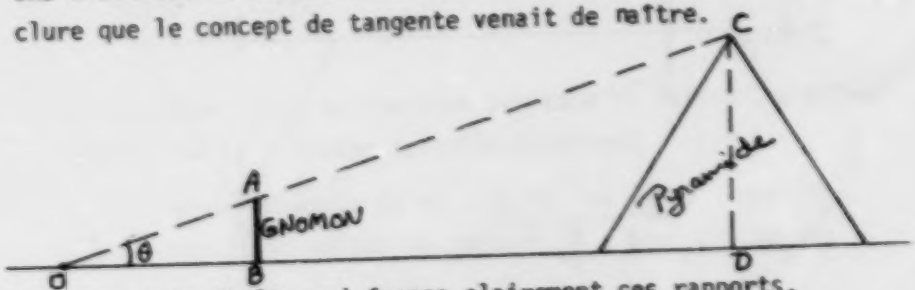
ACTIVITE 3: LE GNOMON ET LA TANGENTE

En l'an (-1550), en Egypte, on parlait de la longueur du gnomon, un espèce de bâton planté à la verticale dans le sol et dont la largeur demeurait fixe. Ce gnomon permettait de calculer la hauteur des pyramides.

Le premier à constater des relations intéressantes fut « Ahmès» il parla de la «SEQT» d'un angle.

Certains historiens croient que ce symbole signifiait «rapport»; d'autres parlent de cotangente.

Une chose est certaine, les rapports utilisés permettent de conclure que le concept de tangente venait de naître.



C'est en fait Thalès qui énonça clairement ces rapports.

$\frac{CD}{AB} = \frac{OD}{OB}$ → *cet énoncé d'égalité de rapports nous suggère l'idée de tangente*

Thalès constata que s'il faisait varier la longueur du bâton ou la distance du bâton à la pyramide, l'angle θ variait automatiquement.

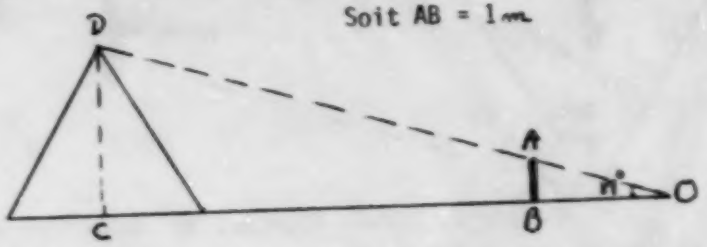
Cela permit à Thalès d'établir des relations dans les triangles semblables

Ex: $\frac{CD}{OD} = \frac{AB}{OB}$

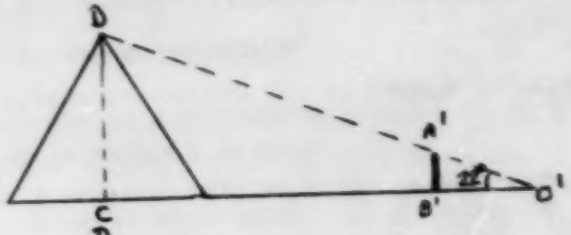
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant utilise trois dessins différents (ou plus), en faisant varier la longueur du bâton et la distance à la pyramide, ce qui fait varier l'angle θ.

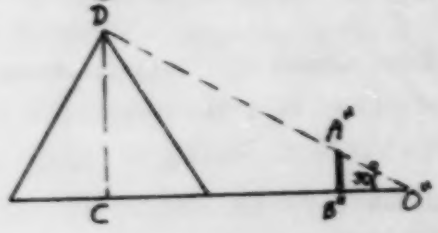
a) Soit AB = 1 m



b)



c)



L'élève doit constater que la mesure de OB varie selon la mesure de l'angle (même si la mesure de DC est invariante).

EXERCICES ET REFERENCES

Attention aux choix des mesures qui doivent respecter la réalité!!!

On a mesuré que, pour un angle de 17°, la mesure de OB est de ≈ 3,271 m

Pour un angle de 22°, la mesure de O'B' est de ≈ 2,475 m

Pour un angle de 30°, la mesure de O" B" est de ≈ 1,732 m

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant fait ensuite calculer le rapport existant entre le côté DC et le côté OB, dans chacun des trois cas:

a) $\frac{AB}{OB} = \frac{1}{3,271} \approx 0,3057169$ (pour un angle de 17°)

b) $\frac{AB}{O'B'} = \frac{1}{2,475} \approx 0,4040404$ (pour un angle de 22°)

c) $\frac{AB}{O''B''} = \frac{1}{1,732} \approx 0,5773672$ (pour un angle de 30°)

L'enseignant pose la question suivante et laisse les élèves travailler et discuter de cette question:

«Pour un angle de 45°, de 60° ou de 75°, quelle serait la valeur du rapport $\frac{AB}{OB}$, pour chacun des cas?»

Par la suite, l'enseignant discute avec les élèves des résultats obtenus et des techniques utilisées et il compare avec les résultats qu'ils auraient dû obtenir.

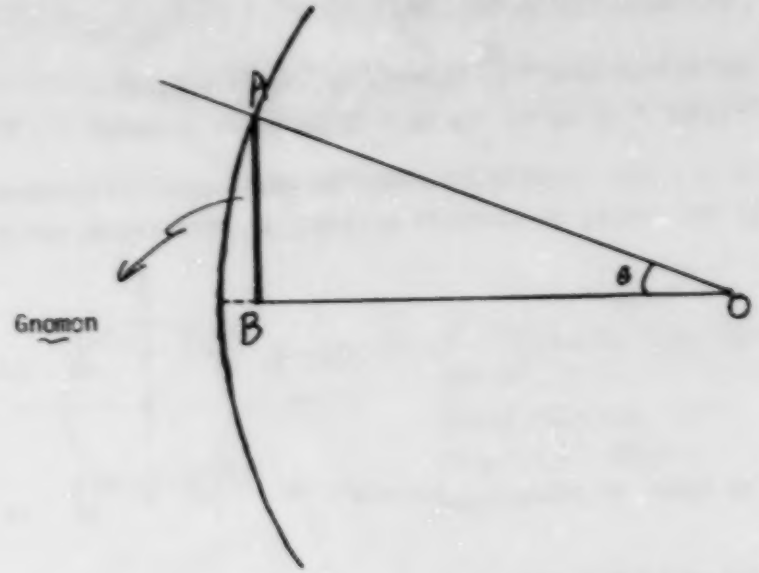
Pour $45^\circ \longrightarrow 1$

$60^\circ \longrightarrow \approx 1,732$

$75^\circ \longrightarrow \approx 3,732$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant propose aux élèves la figure suivante, laquelle est fortement associée à l'activité précédente.



L'élève doit en venir à comprendre que AB = sin θ et que OB = cos θ (ce qui a été expliqué auparavant)

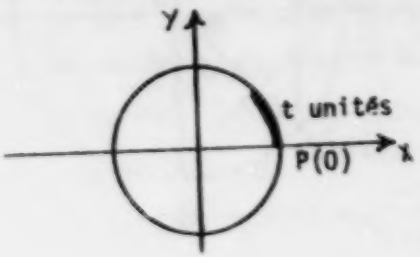
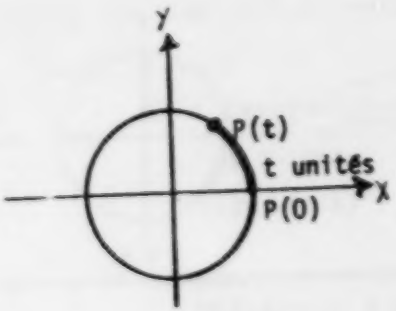
Ensuite, on constate que le rapport $\frac{AB}{OB}$ est égal à $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$

Historiquement, on en est venu à appeler ce rapport «tangente» et

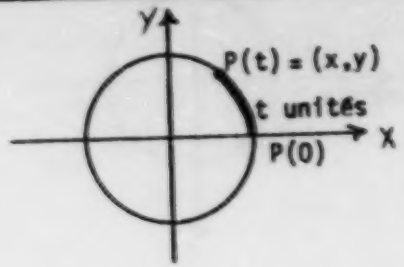
$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

EXERCICES ET REFERENCES

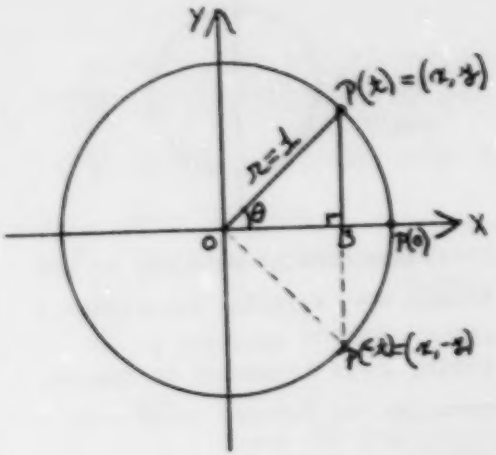
Si on se rapporte au cercle trigonométrique, quelle serait la mesure de AB? et de OB? (O étant le centre du cercle)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
L'enseignant effectue un résumé des trois fonctions vues à date.	
ACTIVITÉ 4: LE SINUS VS LA FONCTION D'ENROULEMENT	
L'enseignant reprend les définitions des «fonctions d'angle» sinus, cosinus et tangente, en ce basant sur la fonction d'enroulement.	*Insister sur cette expression!*
L'enseignant rappelle aux élèves ce qu'ils ont appris à date sur la fonction d'enroulement:	
 je sais placer une longueur quelconque sur le cercle trigonométrique, soit en positif, soit en négatif.	
 à l'extrémité d'une longueur sur le cercle, je fais correspondre un point trigonométrique	

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES



à ce point trigonométrique t, correspondent les coordonnées (x,y) de ce point t.



A partir des coordonnées du point $P(t)$ du cercle trigonométrique, l'enseignant introduit les fonctions trigonométriques de base.

L'enseignant rappelle à l'élève que le segment $P(t)B$ correspond à la longueur de la demi-corde d'angle 2θ.

On se rappelle que $\text{crd } 2\theta = P(t)P(-t)$

$$\sin\theta = \frac{P(t)B}{r} \quad \text{(comme } r = 1\text{)}$$

$$\sin\theta = P(t)B$$

et $\sin\theta = y$

L'élève doit absolument saisir que le segment $P(t)B$ correspond à la coordonnée y du point $P(t)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 5: D'AUTRES FONCTIONS

L'enseignant rappelle à l'élève que le segment OB correspond à $\sin(90^\circ - \theta)$, que l'on a appelé $\cos\theta$

ainsi: $\cos\theta = \frac{OB}{r}$ (comme $r = 1$)

$\cos\theta = OB$

et $\cos\theta = x$

L'élève doit absolument saisir que le segment OB correspond à la coordonnée x du point P(t)

On peut alors définir les fonctions trigonométriques à partir de ces deux fonctions de base.

a) La fonction SINUS, notée sin

$\sin: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow \sin t$ ⇒ *coordonnée de P(t)*

b) La fonction COSINUS, notée cos

$\cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$t \longrightarrow \cos t$ ⇒ *abscisse de P(t)*

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

c) La fonction TANGENTE, notée tan

$$\tan: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow \tan t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\text{ordonnée de } P(t)}{\text{abscisse de } P(t)} = \frac{y}{x}$$

Faire remarquer que la tangente existe en autant que le cosinus existe; donc cos $t \neq 0$

d) La fonction COTANGENTE, notée cot

$$\cot: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow \cot t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\text{abscisse de } P(t)}{\text{ordonnée de } P(t)} = \frac{x}{y}$$

Faire remarquer que la cotangente existe en autant que le sinus existe; donc sin $t \neq 0$

e) La fonction SECANTE, notée sec

$$\sec: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{\text{abscisse de } P(t)} = \frac{1}{x}$$

Faire remarquer que la sécante existe en autant que le cosinus existe; donc cos $t \neq 0$

f) La fonction COSECANTE, notée csc

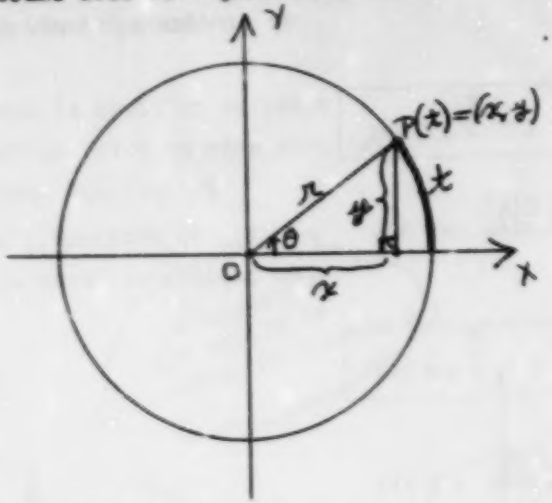
$$\csc: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow \csc t = \frac{1}{\sin t} = \frac{1}{\text{ordonnée de } P(t)} = \frac{1}{y}$$

Faire remarquer que la cosecante existe en autant que le sinus existe; donc sin $t \neq 0$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant résume avec la figure ci-dessous:



a) On appelle sin θ, le rapport de l'ordonnée de P(t) sur le rayon r.

$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{y}{r}}$$

b) On appelle cosθ, le rapport de l'abscisse de P(t) sur le rayon r

$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{x}{r}}$$

Le côté opposé à l'angle θ

Rappeler que le rayon correspond à l'hypoténuse

Si r = 1, sin θ = y

Le côté adjacent à l'angle θ

Si r = 1, cos θ = x

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

c) On appelle $\tan\theta$, le rapport de l'ordonnée de P(t) sur l'abscisse de P(t)

$$\tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

d) On apnelle $\csc\theta$, le rapport du rayon sur l'ordonnée de P(t)

$$\csc\theta = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé}}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y}, \quad y \neq 0$$

e) On appelle $\sec\theta$, le rapport du rayon sur l'abscisse de P(t)

$$\sec\theta = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté adjacent}}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x}, \quad x \neq 0$$

f) On appelle $\cot\theta$, le rapport de l'abscisse de P(t) sur l'ordonnée de P(t)

$$\cot\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

Faire remarquer que

Le rapport $\frac{r}{y}$ correspond au rapport inverse multiplicatif de $\sin\theta$

Si $r = 1$, $\csc\theta = \frac{1}{y}$

Le rapport $\frac{r}{x}$ correspond au rapport inverse multiplicatif de $\cos\theta$

Si $r = 1$, $\sec\theta = \frac{1}{x}$

Le rapport $\frac{x}{y}$ correspond au rapport inverse multiplicatif de $\tan\theta$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

On a pu situer sur le cercle trigonométrique les longueurs correspondant à $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

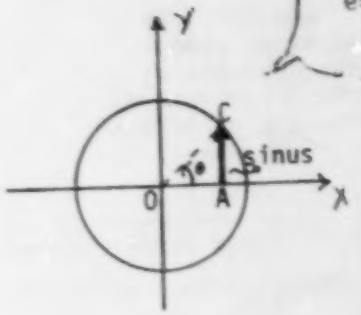
Sous forme de segments orientés! et dans le premier quadrant!

L'enseignant pose la question suivante:

«Peut-on faire de même avec les autres fonctions?»

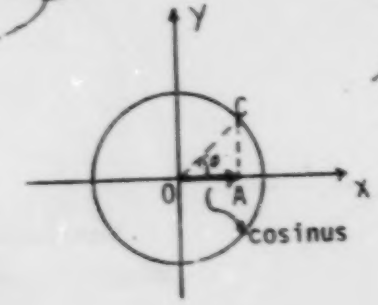
On sait que:

Le segment AC est appelé le sinus de l'angle θ



(Se rappeler que sinus vient du latin semi-inscripta, qui signifie demi-corde)

Le segment OA est appelé le cosinus de l'angle θ



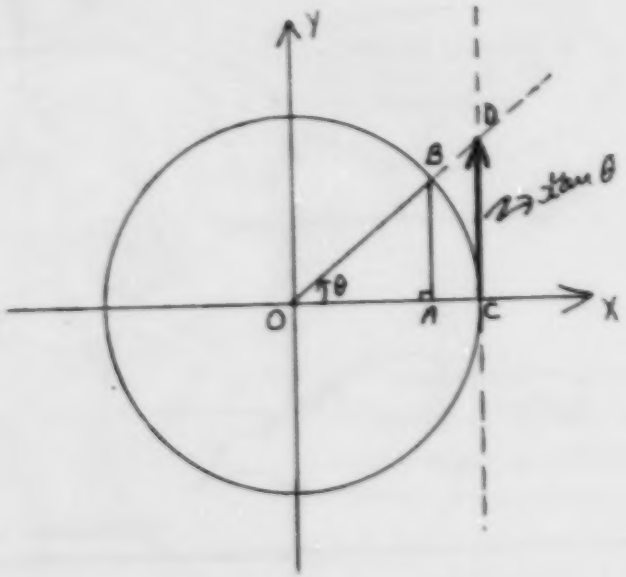
(Se rappeler que le cosinus est le sinus du complément de l'angle θ)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

La tangente est une droite perpendiculaire à l'extrémité du rayon initial (cette droite est alors tangente au cercle)

Le segment BD est appelé la tangente de l'angle θ

Pour une étude plus systématique, l'enseignant utilise un agrandissement de la figure précédente



Prouvons que $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

AAA

on sait que: $\frac{AB}{OA} = \frac{DC}{OC}$ (car les triangles OAB et OCD sont semblables)

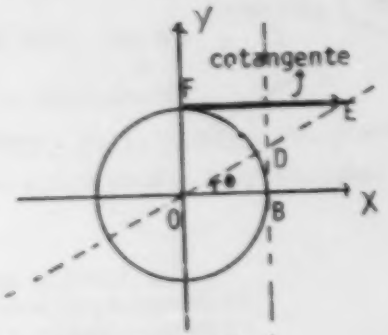
or: $AB = \sin\theta$ et $OA = \cos\theta$

ainsi: $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{DC}{1}$, donc $DC = \tan\theta$

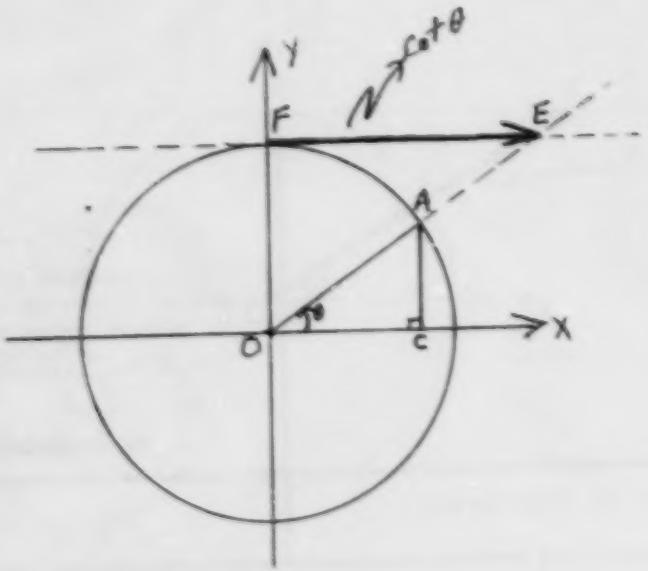
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

La cotangente est une droite parallèle au rayon initial et tangente au cercle; c'est la tangente du complément

ne pas oublier que l'on travaille encore dans le 1er quadrant!



Le segment FE est appelé la cotangente de l'angle θ



Pour une étude plus systématique, l'enseignant utilise un agrandissement de la figure précédente

Prouvons que: $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

AAA

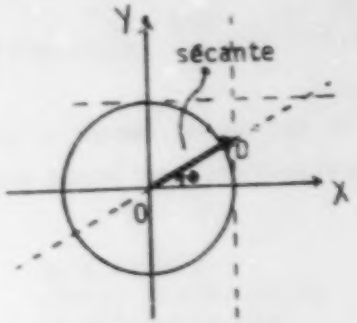
On sait que: $\frac{FE}{OF} = \frac{OC}{AC}$ (car les triangles OAC et OFE sont semblables)

or: $OC = \cos\theta$ et $AC = \sin\theta$

ainsi: $\frac{FE}{1} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$, donc $FE = \cot$ et $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

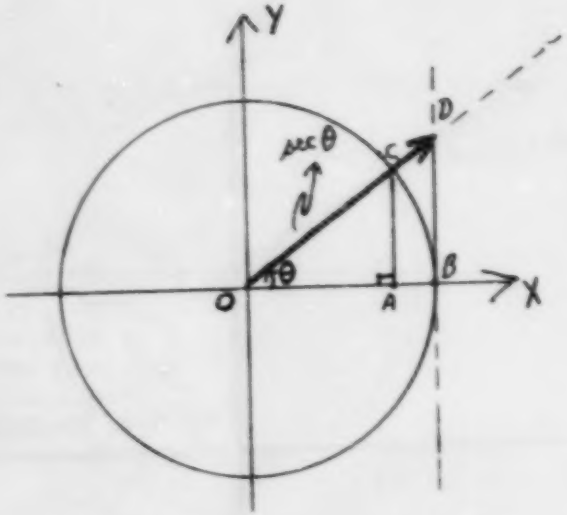
La sécante est une droite qui coupe une figure géométrique; ici, la sécante coupe le cercle trigonométrique.



on travaille encore dans le 1er quadrant!

Le segment OD est appelé la sécante de l'angle θ

Pour une étude encore plus systématique, l'enseignant utilise un agrandissement de la figure précédente.



Prouvons que: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

AAA

On sait que : $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA}$ (car les triangles OAC et OBD sont semblables)

or : $OC = 1$ et $OB = 1$ et $OA = \cos\theta$

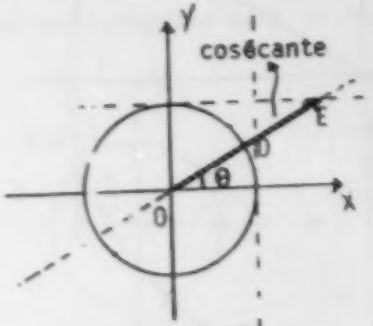
ainsi : $\frac{OD}{1} = \frac{1}{\cos\theta}$, donc $OD = \frac{1}{\cos\theta}$

et $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

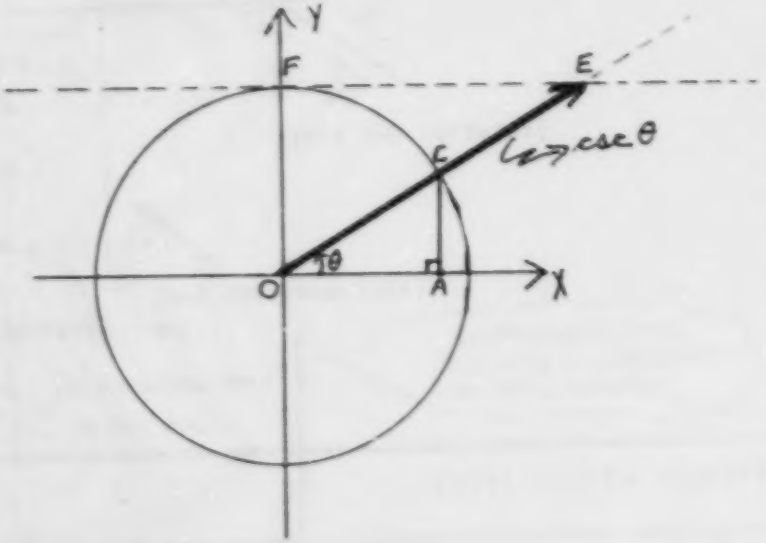
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

La cosécante est une droite qui coupe le cercle trigonométrique; c'est la sécante du complément.

On est encore dans le 1er quadrant!



Le segment OE' est appelé la cosécante de l'angle θ



Prouvons que $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

AAA

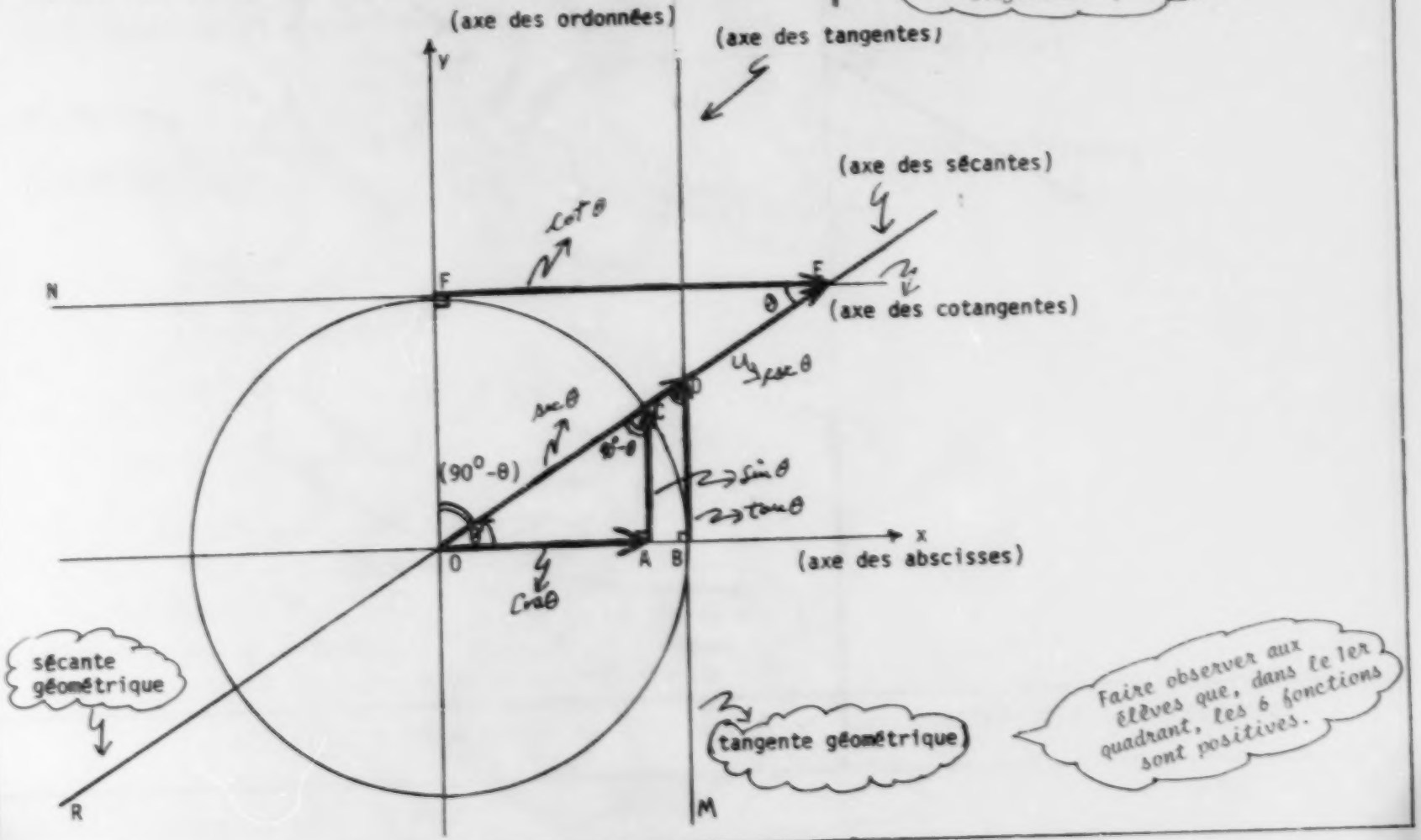
On sait que: $\frac{OE}{OC} = \frac{OF}{AC}$ (car les triangles OAC et OFE sont semblables)

or: $OC = 1$ et $OF = 1$ et $AC = \sin\theta$

ainsi: $\frac{OE}{1} = \frac{1}{\sin\theta}$, donc $OE = \frac{1}{\sin\theta}$

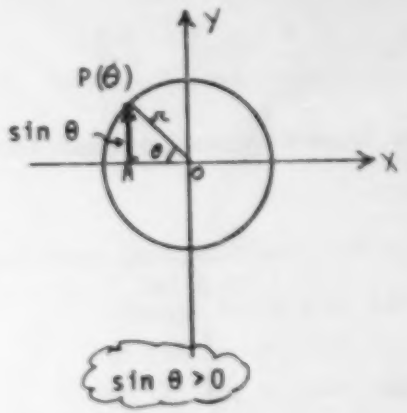
et $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

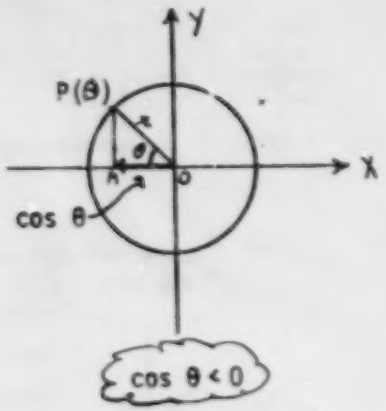
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
L'enseignant présente un cercle trigonométrique sur lequel sont représentées (par des longueurs) les six fonctions trigonométriques.	au fait pourquoi y a-t-il 6 fonctions trigonométriques?

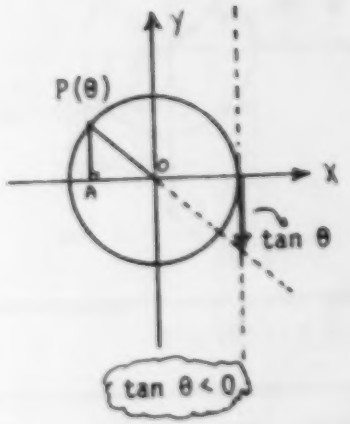


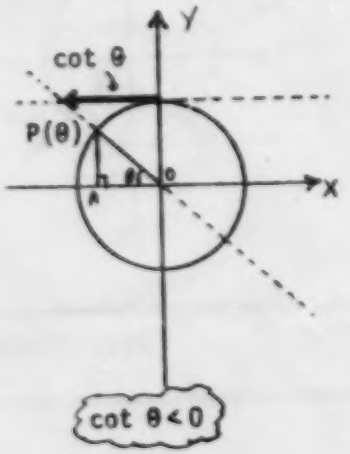
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant reprend le processus précédent en situant les six fonctions dans le deuxième quadrant. Insister sur le signe de chacune des fonctions dans le 2ème quadrant.

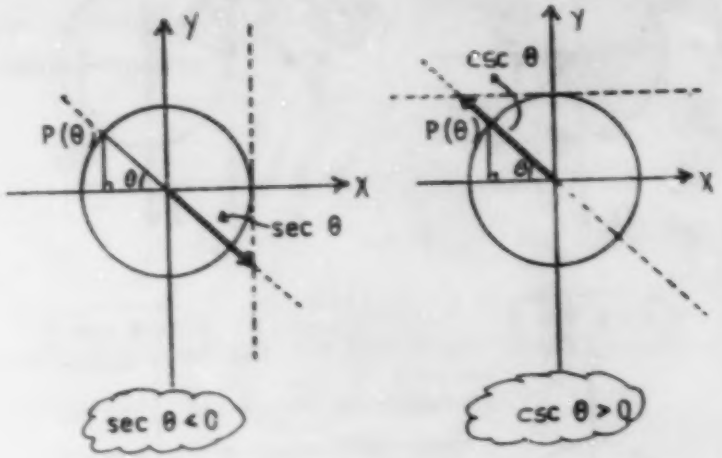








ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

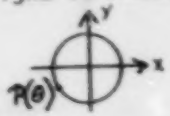


L'enseignant propose les exercices suivants:

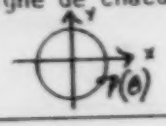
EXERCICES ET REFERENCES

Exercices-problèmes

1. Construis le graphique de chacune des six fonctions dans le 3e quadrant, et indique le signe de chacune des fonctions.

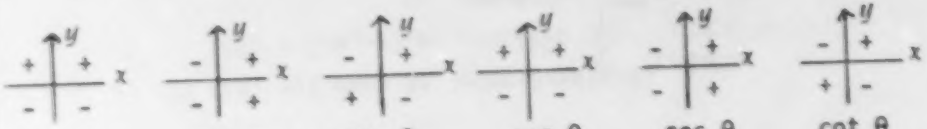


2. Construis le graphique de chacune des six fonctions dans le 4e quadrant, et indique le signe de chacune des fonctions



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant résume le travail des élèves en construisant avec les élèves le tableau de chacune des six fonctions, en fonction de leur signe.



sin θ cos θ tan θ csc θ sec θ cot θ

L'enseignant fait remarquer aux élèves que les signes de

sin θ et csc θ sont identiques
cos θ et sec θ sont identiques
tan θ et cot θ sont identiques

Pourquoi?

L'enseignant rappelle que:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ et } \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

L'élève devait constater que les signes de toutes les fonctions dépendent des signes de sin θ et de cos θ!

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Donc: parce que les fonctions trigonométriques sont définies d'après les coordonnées d'un point trigonométrique, les signes de chacune de ces fonctions varient selon ce quadrant dans lequel se trouve le point trigonométrique.

En résumé:

Soit $P(\theta)$ et $\begin{matrix} x>0 \\ y>0 \end{matrix}$ et $P(\theta) = (x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

a) Si $P(\theta)$ est dans le 1er quadrant,

$P(\theta) = (x,y)$ et $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ $\Rightarrow$ $\tan\theta>0$, $\csc\theta>0$, $\sec\theta>0$, $\cot\theta>0$

b) Si $P(\theta)$ est dans le 2ème quadrant,

$P(\theta) = (-x,y)$ et $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ $\Rightarrow$ $\tan\theta>0$, $\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$

c) Si $P(\theta)$ est dans le 3e quadrant,

$P(\theta) = (-x,-y)$ et $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$ $\Rightarrow$ $\tan\theta>0$, $\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$

d) Si $P(\theta)$ est dans le 4e quadrant,

$P(\theta) = (x,-y)$ et $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$ $\Rightarrow$ $\tan\theta<0$, $\csc\theta<0$, $\sec\theta>0$, $\cot\theta<0$

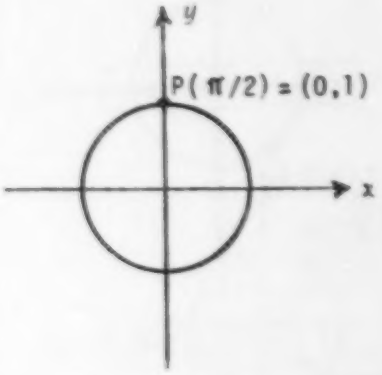
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant pose les questions suivantes:

Quelle est la valeur de cos ($\pi/2$)
de tan ($\pi/4$)
de sec ($3\pi/2$)
de cot ($-3\pi/2$)
de cos ($-11\pi/6$) ?

a) $\cos(\pi/2) = ?$

On commence par situer le point $P(\pi/2)$ sur le cercle trigonométrique



On cherche ses coordonnées: $P(\pi/2) = (0,1)$

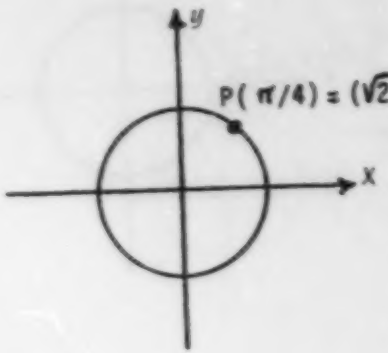
Ainsi: $\cos(\pi/2) = 0$

EXERCICES ET REFERENCES

A l'aide des élèves, l'enseignant trouve les valeurs demandées.

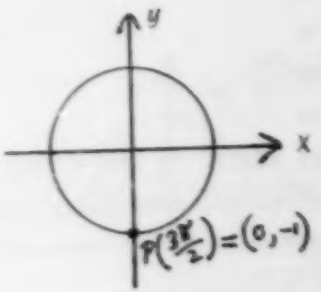
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

b) $\tan(\pi/4) = ?$



$$\tan(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

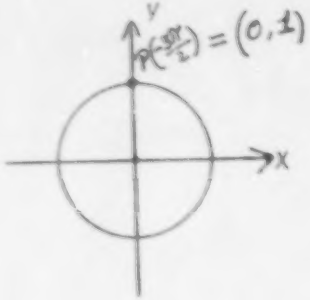
c) $\sec(3\pi/2)$



$$\sec(3\pi/2) = \frac{1}{-1} = -1$$

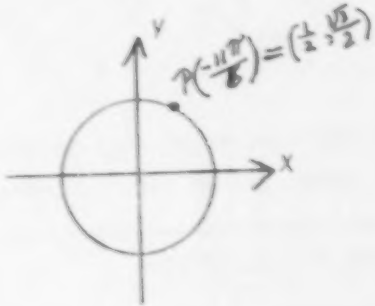
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

d) $\cot(-3\pi/2) = ?$



$\cot(-3\pi/2) = \frac{0}{1} = 0$

e) $\cos(-11\pi/6) = ?$



$\cos(-11\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Qu'arrive-t-il avec un cas comme $\tan(\pi/2)$?
L'enseignant discute de tels cas avec les élèves.

Qu'arrive-t-il à un point situé immédiatement avant le point $P(\pi/2)$?
ex: (0,1, 0,99) ou (0,01, 0,9999) ou...!!!

$$\tan(\pi/2) = \frac{\sin(\pi/2)}{\cos(\pi/2)}$$

or: $P(\pi/2) = (0,1)$

Donc: $\tan(\pi/2) = \frac{1}{0} = \ldots.!!!$

Parler de la division par 0 ....!

On a: $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0,99}{0,1} \approx 9,9$

et

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0,9999}{0,01} \approx 99$

et

....

Quelle est la tendance de $\tan(\pi/2)$?
L'enseignant discute de ce fait avec les élèves et se sert de la relation de Pythagore pour illustrer ce fait.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Exercices:

1) Quelle est la valeur de chacune des expressions suivantes?

a) csc $(-\pi/2)$
b) sin $(2\pi/3)$
c) sin $(-3\pi/2)$
d) sec 0
e) csc $(-\pi/4)$
f) cos $(5\pi/3)$

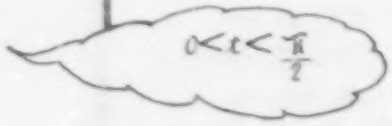
2) Trouve la valeur de:

a) cos 480°
b) sin 960°
c) cos (-780°)
d) sin (-870°)
e) sec (900°)
f) tan (-855°)
g) csc (-660°)
h) cot (840°)
i) csc (-765°)
j) cos (1125°)
k) cot 990°
l) sin 855°
m) sec 1305°
n) cos 960°
o) sec (-1575°)
p) sin $(15\pi/4)$
q) cot $(23\pi/4)$
r) sec $(7\pi/3)$
s) cot $16\pi/3$
t) sec $(3\pi/2 + \pi/3)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant pose cette autre question:

«Quelle est la valeur de cos $(\pi + t)$?»



L'élève devrait savoir que $P(\pi + t)$ est dans le 3e quadrant.
que $P(\pi + t)$ est symétrique à $P(\pi - t)$ par rapport à l'axe des x (y=0)
que $P(\pi - t)$ est symétrique à $P(t)$ par rapport à l'axe des y (x=0)

EXERCICES ET REFERENCES

3) Soit $0 < t < 2\pi$

Dans chacun des cas suivants, on donne une fonction de l'angle t; calcule la valeur de chacune des 5 autres fonctions trigonométriques.

a) sin t = 1/3
b) cos t = 2/5
c) tan t = 4/3
d) cot t = 5/6
e) sec t = 3/2
f) csc t = 8/7

4) Soit f : $r \rightarrow (x,y)$, la fonction d'enroulement de $\mathbb{R}$ sur le cercle trigonométrique.

Si f(0) = (1,0), calcule:

a) $f(\pi/4)$
b) $f(\pi/6)$
c) $f(\pi/3)$
d) $f(7\pi/4)$
e) $f(-2\pi/3)$
f) $f(-19\pi/6)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Donc, il s'agit d'inverser le processus:

$P(t) = (\cos t, \sin t)$

$P(\pi - t) = (-\cos t, \sin t)$

$P(\pi + t) = (-\cos t, -\sin t)$

$\cos(\pi + t) = -\cos t$

Discuter avec les élèves de l'influence de t sur la valeur de $\cos[\pi + t]$!

On pourrait aussi discuter avec les élèves de l'influence de tout $\frac{n\pi}{k}$, n et $k \in \mathbb{R}$

Exercices

1) Complète:

a) $\cos(\pi + t) = -\cos t$

$\cos(-x) =$

$\cos(\pi - x) =$

$\cos(\pi/2 - x) =$

$\cos(\pi/2 + x) =$

$\cos(3\pi/2 - x) =$

$\cos(3\pi/2 + x) =$

b) $\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\sin(-x) =$

$\sin(\pi - x) =$

$\sin(\pi/2 - x) =$

$\sin(\pi/2 + x) =$

$\sin(3\pi/2 - x) =$

$\sin(3\pi/2 + x) =$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	2. Trouve la tangente et la cotangente de chacun des angles précédents. 3. Trouve la sécante et la cosécante de chacun des angles indiqués en 1)a) 4. Réduis les fonctions trigonométriques suivantes (on suppose que P(t) se trouve dans le 1er quadrant). a) cos ($\pi/2 - \alpha$) b) tan ($\pi/2 - \alpha$) c) csc ($\alpha - \pi/2$) d) sin ($\pi/2 - \alpha$) e) sec ($\alpha - \pi/2$) f) cot ($\alpha - \pi/2$) g) tan ($\alpha - \pi/2$) h) sin ($\alpha - \pi/2$) i) cos ($\pi/2 - \alpha$) j) csc ($\pi/2 - \alpha$) k) cot ($\pi/2 - \alpha$) l) sec ($\pi/2 - \alpha$)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

5) Transforme la fonction donnée en une fonction $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$

a) $\sin(2\pi - \alpha)$ e) $\sin(\pi - \alpha)$

b) $\cot(2\pi - \alpha)$ f) $\cot(\alpha - \pi)$

c) $\cos(2\pi - \alpha)$ g) $\cot(\pi - \alpha)$

d) $\sec(2\pi - \alpha)$ h) $\sec(\pi - \alpha)$

6) Evalue:

a) $\sin 13\pi/6$ g) $\sin -13\pi/4$

b) $\csc 21\pi/4$ h) $\csc 25\pi/3$

c) $\cos 20\pi/3$ i) $\cos -31\pi/3$

d) $\sec -7\pi/3$ j) $\sec 89\pi/6$

e) $\tan -17\pi/4$ k) $\tan 33\pi/4$

f) $\cot -29\pi/6$ l) $\cot -65\pi/6$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

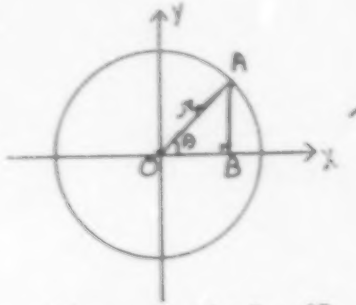
EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 6: LES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES ET LE TRIANGLE RECTANGLE

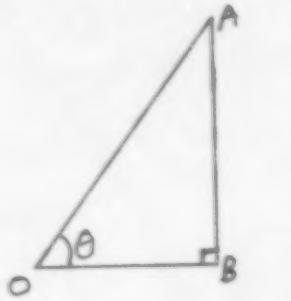
Cette activité vise à établir le lien entre les fonctions trigonométriques définies à travers la fonction d'enroulement et la trigonométrie du triangle rectangle vue en quatrième secondaire.

L'enseignant établit un parallèle entre les deux cas:

a)



Si r = 1, sin θ = AB



Si AO = 1, sin θ = $\frac{AB}{1}$

sin θ = AB

Côté opposé / Hypoténuse

Ex: si AB = 10 et AO = 14

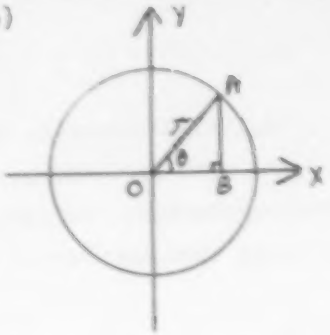
alors sin θ = $\frac{10}{14} \approx 0{,}7142857$

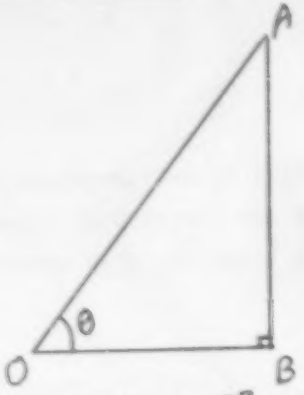
L'élève verra un peu plus tard comment retrouver la valeur de l'angle θ.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

b)





Si $r=1$, $\cos\theta = OB$

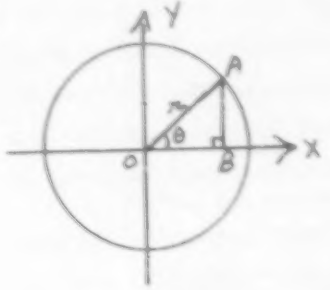
Si $AO=1$, $\cos\theta = \frac{OB}{1} = OB$

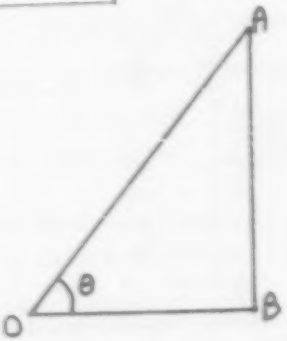
côté adjacent / hypoténuse

Ex: si OB = 12 et AO = 17

alors $\cos\theta = \frac{12}{17} \approx 0,7058824$

c)





côté opposé / côté adjacent

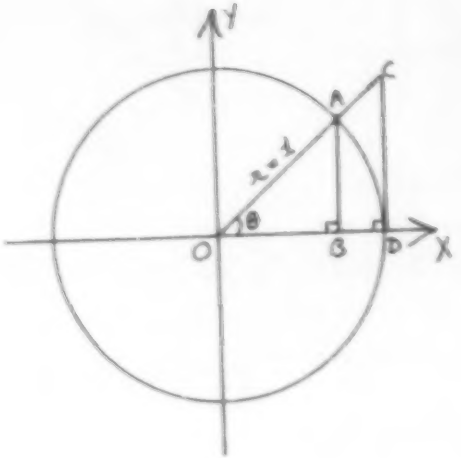
Ex: si OB = 0,6 et AB = 0,8 et OA = 1

alors $\tan\theta = \frac{0,8}{0,6} \approx 1,3333333$

$\tan\theta = \frac{AB}{OB}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

On peut vérifier l'exactitude de ce dernier rapport, à l'aide du cercle trigonométrique.



On sait que:

$OD = 1$
$OA = 1$
$OB = 0,6$
$AB = 0,8$
$CD = 1,3333333$

ainsi: $\frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD}$

et

$\frac{0,8}{0,6} = \frac{1,3333333}{1}$

$1,33\overline{3} = 1,3333333$

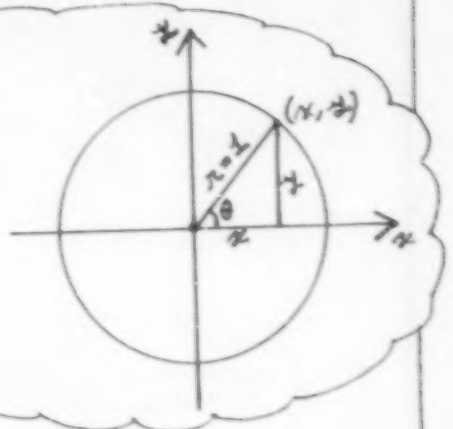
L'enseignant peut utiliser le même processus pour les trois autres fonctions trigonométriques, si cela s'avère nécessaire; car cette activité mevisait qu'à relier la fonction d'enroulement à la trigonométrie du triangle rectangle.

EXERCICES ET REFERENCES

car tan θ = 1,3333333

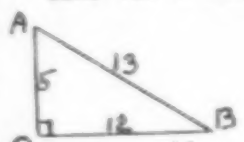
En résumé:

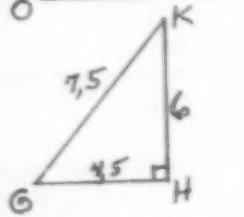
sin θ = y/r
cos θ = x/r
tan θ = y/x
csc θ = r/y
sec θ = r/x
cot θ = x/y

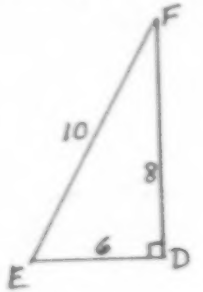


Exercices

1) Calcule la valeur de sin θ, cos θ et tan θ dans les triangles rectangles ci-dessous.







ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

ACTIVITÉ 7: LA CONSTRUCTION D'UN TABLEAU UTILE

L'enseignant présente aux élèves le tableau non complété de la page suivante, et explique la signification de chacune des différentes colonnes et rangées.

L'activité consiste à compléter en équipes de deux ce tableau.

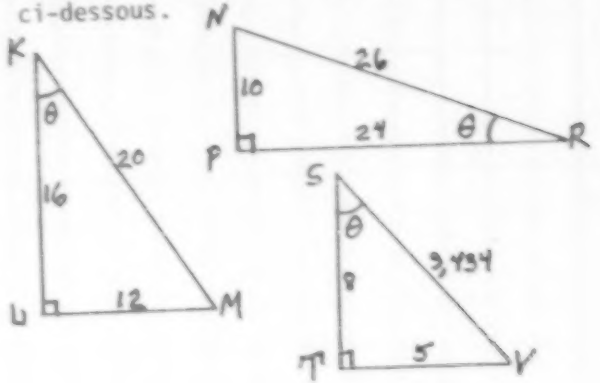
Chaque élève complète tout de même son propre tableau; cela lui sera utile plus tard.

Lorsque l'élève aura complété son tableau, l'enseignant, à l'aide d'une acétate préparée à cet effet, permet aux élèves d'effectuer les corrections voulues; lorsqu'un élève a une erreur, l'enseignant demande aux autres élèves d'expliquer l'erreur, et par la suite de la corriger (avec explications)

c'est une bonne occasion d'amener certains élèves en avant de la classe pour expliquer leur point de vue.

EXERCICES ET REFERENCES

2) Calcule la valeur de sec θ, csc θ et cot θ dans les triangles ci-dessous.



ANGLES(θ)			FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES					
		Coordonnées	Cos θ	Sin θ	Tan θ	Sec θ	Csc θ	Cot θ
0	0	(1,0)	1	0	0	1		
30	$\pi/6$							
45	$\pi/4$							
60	$\pi/3$							
90	$\pi/2$							
120	$2\pi/3$							
135	$3\pi/4$							
150	$5\pi/6$							
180	π							
210	$7\pi/6$							
225	$5\pi/4$							
240	$4\pi/3$							
270	$3\pi/2$							
300	$5\pi/3$							
315	$7\pi/4$							
330	$11\pi/6$							
360	2π							
-30	$-\pi/6$							
-45	$-\pi/4$							
-60	$-\pi/3$							
-90	$-\pi/2$							
-120	$-2\pi/3$							
-135	$-3\pi/4$							
-150	$-5\pi/6$							
-180	$-\pi$							
-210	$-7\pi/6$							
-225	$-5\pi/4$							
-240	$-4\pi/3$							
-270	$-3\pi/2$							
-300	$-5\pi/3$							
-315	$-7\pi/4$							
-330	$-11\pi/6$							
-360	-2π							

ANGLES(θ)			FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES					
		Coordonnées	Cos θ	Sin θ	Tan θ	Sec θ	Csc θ	Cot θ
0	0	(1,0)	1	0	0	1		
30	$\pi/6$							
45	$\pi/4$							
60	$\pi/3$							
90	$\pi/2$							
120	$2\pi/3$							
135	$3\pi/4$							
150	$5\pi/6$							
180	π							
210	$7\pi/6$							
225	$5\pi/4$							
240	$4\pi/3$							
270	$3\pi/2$							
300	$5\pi/3$							
315	$7\pi/4$							
330	$11\pi/6$							
360	2π							
-30	$-\pi/6$							
-45	$-\pi/4$							
-60	$-\pi/3$							
-90	$-\pi/2$							
-120	$-2\pi/3$							
-135	$-3\pi/4$							
-150	$-5\pi/6$							
-180	$-\pi$							
-210	$-7\pi/6$							
-225	$-5\pi/4$							
-240	$-4\pi/3$							
-270	$-3\pi/2$							
-300	$-5\pi/3$							
-315	$-7\pi/4$							
-330	$-11\pi/6$							
-360	-2π							

ANGLES(θ)			FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES					
		Coordonnées	Cos θ	Sin θ	Tan θ	Sec θ	Csc θ	Cot θ
0	0	(1,0)	1	0	0	1		
30	$\pi/6$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
45	$\pi/4$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60	$\pi/3$	$(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90	$\pi/2$	(0,1)	0	1			1	0
120	$2\pi/3$	$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
135	$3\pi/4$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
150	$5\pi/6$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$-\sqrt{3}$
180	π	(-1,0)	-1	0	0	-1		
210	$7\pi/6$	$(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{3}$
225	$5\pi/4$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
240	$4\pi/3$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
270	$3\pi/2$	(0,-1)	0	-1			-1	0
300	$5\pi/3$	$(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
315	$7\pi/4$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
330	$11\pi/6$	$(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\sqrt{3}$
360	2π	(1,0)	1	0	0	1		
-30								
-45								
-60								
-90								
-120								
-135								
-150								
-180								
-210								
-225								
-240								
-270								
-300								
-315								
-330								
-360								

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITÉ 8: CONCLUSION

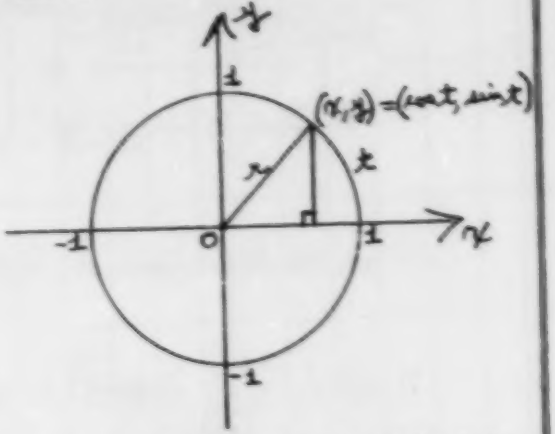
L'enseignant apporte une conclusion à cette section en rappelant la définition des fonctions trigonométriques sinus et cosinus à partir de la fonction d'enroulement.

$\forall\, t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (x,y)$

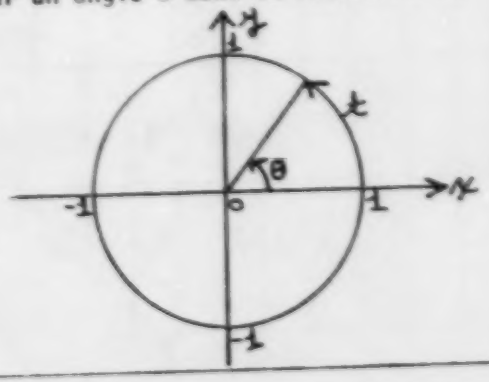
$\cos t = x$

$\sin t = y$

ainsi: $f(t) = (\cos t, \sin t)$



Un sait qu'à tout nombre réel r correspond un point du cercle trigonométrique ayant pour coordonnées f(r). Faire observer que ce point est déterminé également par un angle θ dont la mesure en radians est égale à t.



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

«Certaines régions du tableau ont été hachurées».

L'enseignant demande aux élèves d'expliquer ce fait

(Discussions qui devraient amener les élèves à constater que le dénominateur ne peut être égal à 0; si cela est le cas, on dira que cette fonction n'est pas définie)

Ex: $\cot \theta^\circ = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{0} = ?$

$\csc \theta^\circ = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{0} = ?$

On peut se demander ce qui se passe avant que l'on atteigne cette valeur de 0°.

Ex: $\cot 1^\circ = \frac{\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{0,9998476}{0,0174524} \approx 57,289962$

$\cot 1/2^\circ = \frac{\cos 1/2^\circ}{\sin 1/2} \approx 114,58865$

$\cot 1/10^\circ = \frac{\cos 1/10^\circ}{\sin 1/10} \approx 572,95721$

$\cot 1/100^\circ = \frac{\cos 1/100^\circ}{\sin 1/100} \approx 5729,5779$

etc...

On constate que la valeur de la cotangente augmente de plus en plus lorsque θ tend vers 0.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

L'enseignant peut utiliser une autre fonction non définie et refaire le même cheminement, s'il y a lieu.

Faire remarquer aux élèves que les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ne pas oublier que le domaine de la fonction d'enroulement est $\mathbb{R}$.

Donc, le domaine de ces deux fonctions est $\mathbb{R}$ et l'image de ces deux fonctions est $[-1, 1]$.

Discuter avec les élèves de cet énoncé.

Il s'agit ici d'intuitionner les résultats; l'élève reverra plus tard ces notions!

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

1) Refais le processus vue en classe pour montrer que tan 270° et sec -90° sont non définies.

2) Pourquoi les fonctions sinus et cosinus sont-elles toujours définies?

Utiliser le trigonographe, si cela s'avère nécessaire!

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

$f(t) = (x,y)$

$f(t) = (\cos t, \sin t)$

L'élève devrait utiliser sa calculatrice pour intuitionner les résultats!!!

$(0° < 0 < 1080°)$

Prendre des angles suffisamment grands pour pouvoir déceler la périodicité

Si cela n'a pas été fait auparavant, profiter de cette occasion pour expliquer aux élèves comment trouver les valeurs de différentes fonctions sur sa calculatrice.

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

1) Quelle est la valeur maximale que peut prendre l'ordonnée?
2) Quelle est la valeur maximale que peut prendre l'abscisse?
3) Quel est le domaine de la fonction sinus?
4) Quel est le domaine de la fonction cosinus?
5) Quelle serait l'image des fonctions sinus et cosinus?
6) Quels seraient le domaine et l'image de la fonction tangente?
7) Quels seraient le domaine et l'image des fonctions cosécante, sécante et cotangente?

SECTION 2

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

BLOC 4

OBJECTIFS 2.3.7 à 2.3.10

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.7) TRACER le graphique cartésien des fonctions sinus, cosinus et tangente.	PAGE: 1

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 1: GRAPHIQUE DE LA FONCTION SINUS

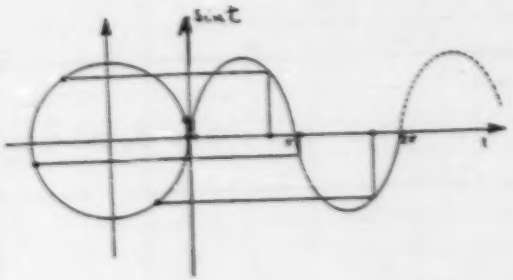
L'enseignant rappelle la définition de la fonction sinus:

$$\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \sin x$$

$f(x) = \sin x$

Dans ce bloc, lorsqu'on utilise le mot graphique, on parle de graphique cartésien.

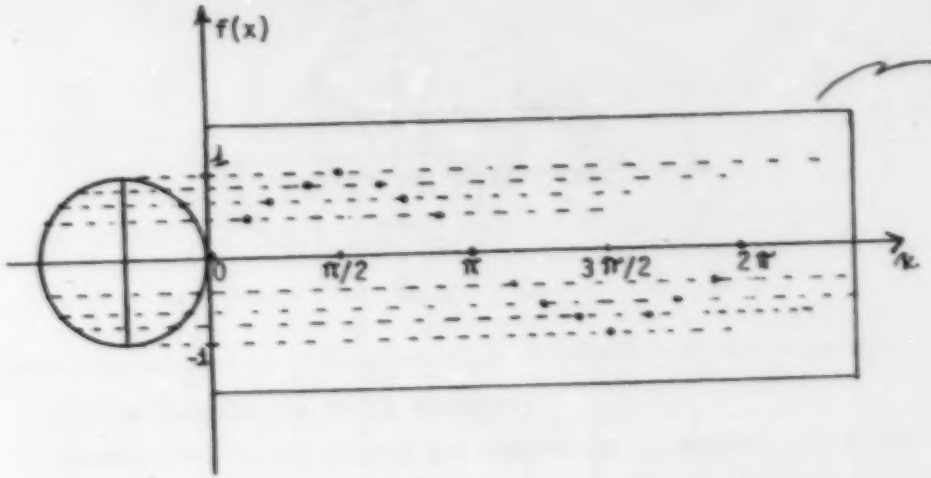
Pour construire le graphique de la fonction sinus, on utilise le fait que «sin t» est l'ordonné d'un point sur le cercle trigonométrique, c'est-à-dire «la hauteur de ce point». Il s'agit donc de transporter cette «hauteur».



On peut aussi utiliser le trigonographe pour faire visualiser cette construction, en plaçant une feuille millimétrique de 14 cm sur 32 cm.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.7) TRACER le graphique cartésien des fonctions sinus, cosinus et tangente.	PAGE : 2

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES



Feuille millimétrique

Pour construire le graphique, l'élève devra utiliser le trigonographe qu'il a lui-même construit, ainsi que les valeurs déjà reportées sur le disque.

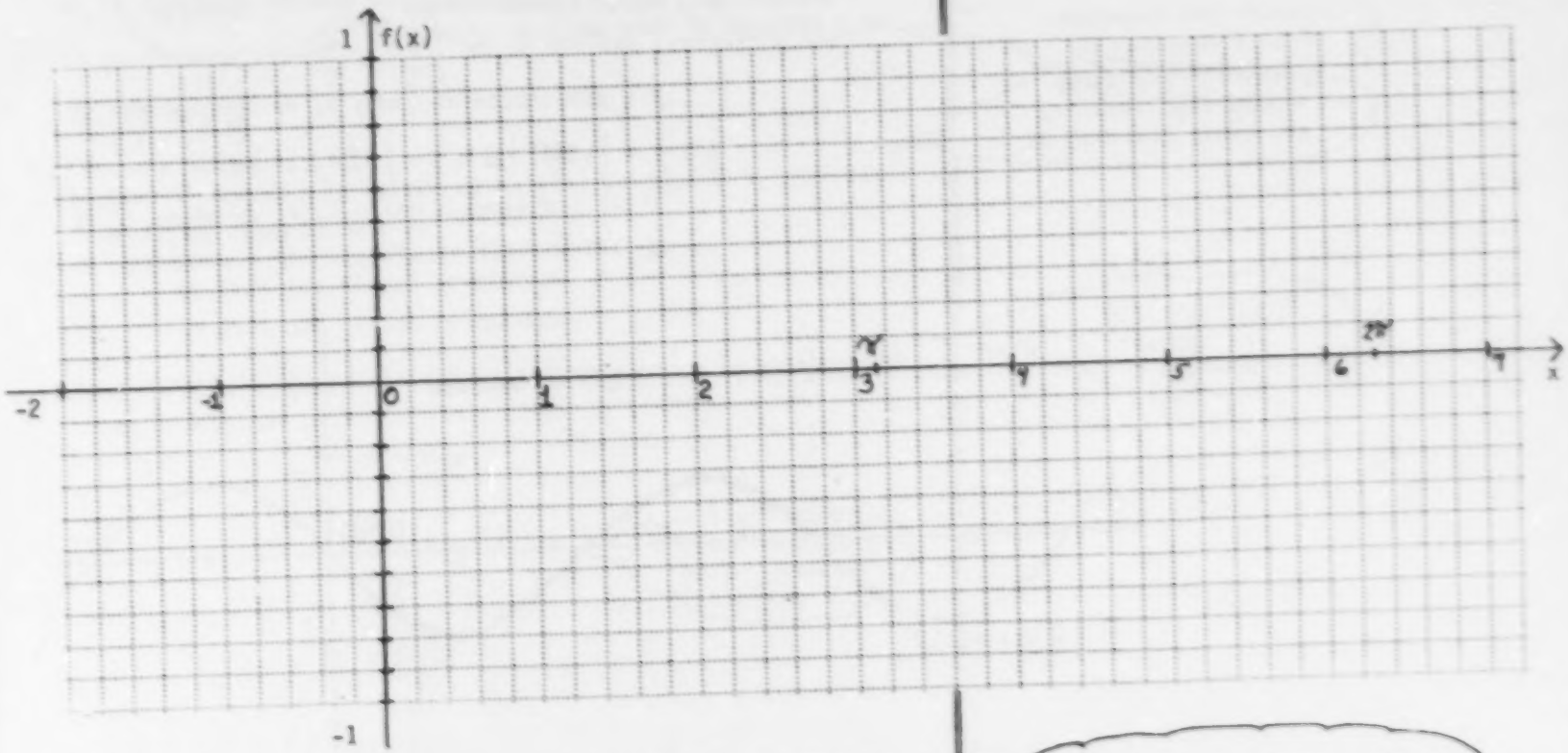
Cette construction est strictement géométrique et elle vise à faire prendre conscience à l'élève de l'allure de la courbe du sinus.

Par la suite, l'enseignant demande à l'élève de construire le graphique du sinus, en utilisant sa calculatrice et/ou le tableau des valeurs construit précédemment.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.7)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

A titre d'exemple, faire compléter le graphique ci-dessous.



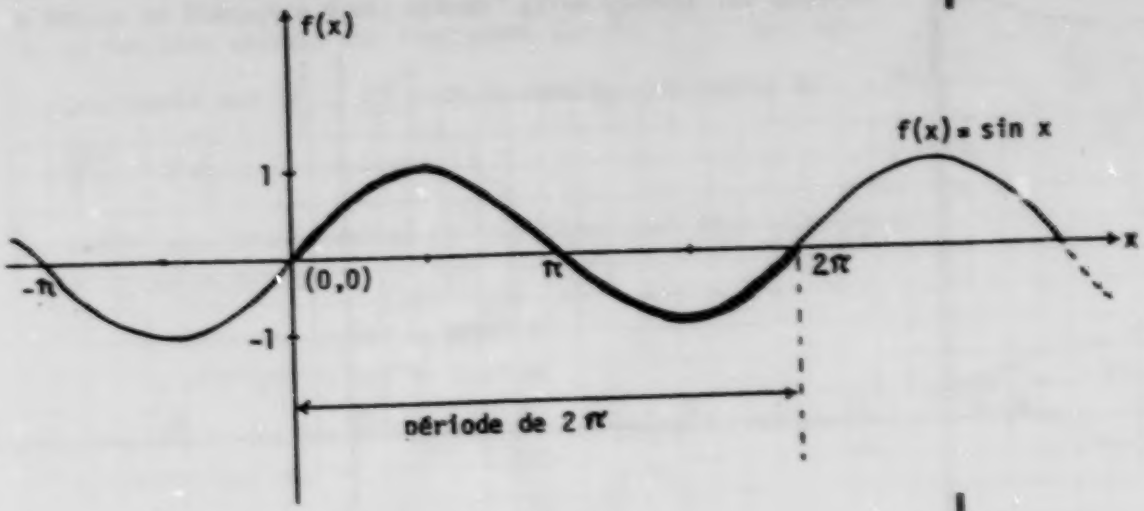
A partir du graphique ainsi obtenu, faire <u>dégager</u> les éléments suivants:

découvrir....

Vérifier que l'élève utilise bien le mode radian sur la calculatrice!!!

OBJECTIF INTERMEDIAIRE 2.3.9 DÉTERMINER le minimum ou le maximum des fonctions sinus ou cosinus.
2.3.10 L'une des fonctions sinus, cosinus ou tangente étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE | EXERCICES ET REFERENCES



1. Le domaine de la fonction «sinus» est $\mathbb{R}$.
2. L'image de la fonction «sinus» est $[-1,1]$
   $\rightarrow \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R} \mid |y| \leq 1\} = [-1,1]$
3. La période de la fonction «sinus est 2π

définir le concept de période

→ Etablir un lien avec la période d'un développement décimal périodique.

→ Montrer que la période peut se mesurer de multiples façons.

La fonction sinus est toujours plus petite ou égale à 1

Les côtés utilisés doivent être co-terminaux!

De (0,0) à 2π, ou
de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{5\pi}{2}$ ou
de π à 3π ou...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

4. La fonction «sinus» est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et de nouveau croissante sur $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Rappeler les concepts de croissance et de décroissance

5. Quelle que soit la valeur de x, f(x) ne peut être inférieure à -1, ni supérieure à 1;

   on dira que -1 est le minimum

   on dira que 1 est le maximum

Discuter sur le concept d'amplitude

6. L'amplitude (A) est la demi-différence entre le maximum (M) et le minimum (m):

$$A = \frac{M-m}{2}$$

$$A = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

C'est l'amplitude de la fonction sinus

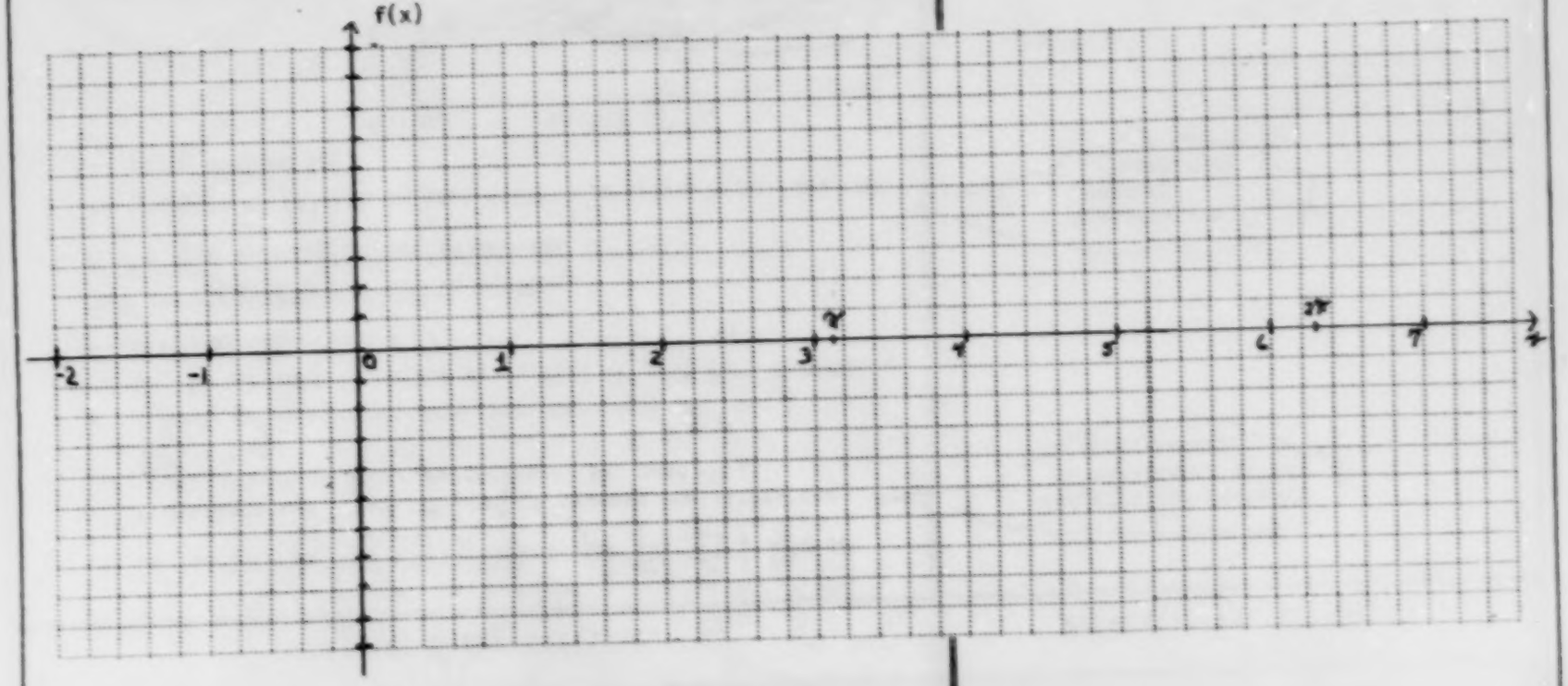
OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.7) TRACER le graphique cartésien des fonctions sinus, cosinus et tangente.	PAGE: 6
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 2: GRAPHIQUE DE LA FONCTION COSINUS

L'enseignant demande à l'élève de construire le graphique du cosinus, en utilisant sa calculatrice et/ou le tableau des valeurs construit précédemment.

$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

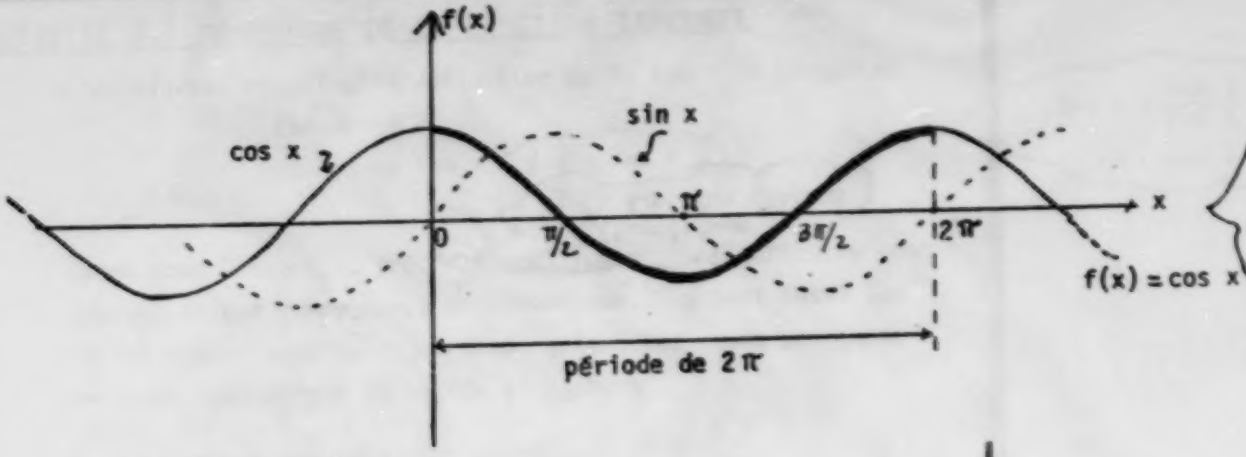
$x \to \cos x \quad \{f(x) = \cos x$



A partir du graphique ainsi obtenu, faire dégager les éléments suivants:

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.8) TROUVER le domaine et l'image des fonctions sinus, cosinus ou tangente.	PAGE: 7

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES



Sachant que $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, *faire constater que la représentation graphique du cosinus est une translation (un déphasage) de* $\frac{\pi}{2}$ *vers la gauche* $(-\frac{\pi}{2})$ *de la représentation graphique du sinus.*

A partir de ce graphique construit par les élèves, faire dégager les éléments suivants:

1. Le domaine de la fonction «cosinus» est aussi $\mathbb{R}$
2. L'image de la fonction «cosinus» est aussi $[-1,1]$
3. La période de la fonction «cosinus» est aussi 2π

Utiliser les mêmes réflexions que pour la fonction sinus!

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

4. La fonction «cosinus» est décroissante sur $[0, \pi]$ et croissante sur $[\pi, 2\pi]$

5. Quelle que soit la valeur de x, f(x) ne peut être inférieure à -1, ni supérieure à 1;

   on dira que -1 est le minimum
   on dire que 1 est le maximum.

6. L'amplitude (A) est la demi-différence entre le maximum (M) et le minimum (m):

$$A = \frac{M-m}{2}$$

$$A = \frac{1-(-1)}{2} = 1$$

c'est l'amplitude de la fonction cosinus

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

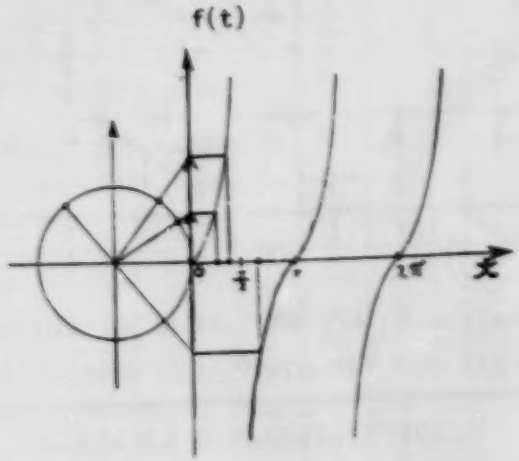
ACTIVITE 3: GRAPHIQUE DE LA FONCTION TANGENTE

L'enseignant rappelle la définition de la fonction tangente:

$$\tan: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \tan x \quad (f(x) = \tan x)$$

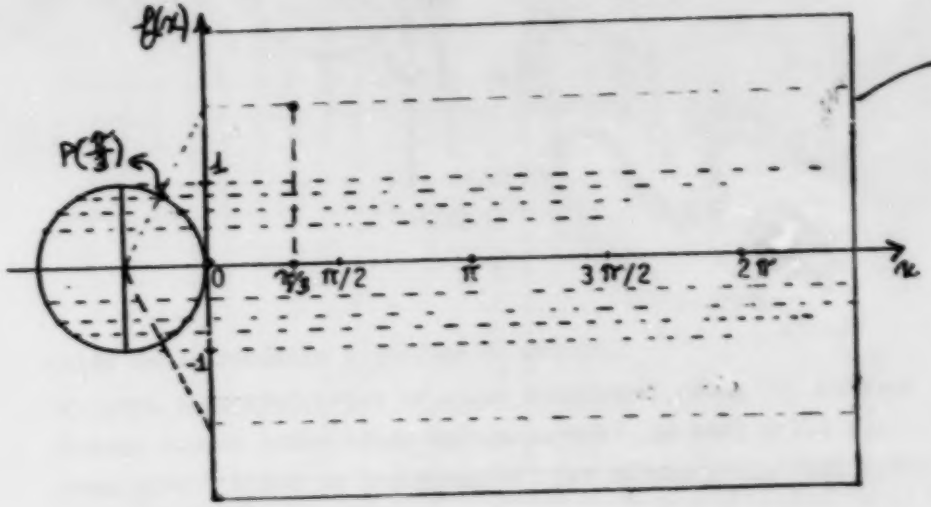
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{et} \quad \cos x \neq 0$$

Comme nous l'avons vu précédemment, les segments orientés sont souvent utiles comme moyen mémotechnique. On peut aussi les utiliser pour construire certains graphiques comme par exemple celui de la tangente illustrée ci-dessous:



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

On peut aussi utiliser le trigonographe pour faire visualiser cette construction, en plaçant une feuille millimétrique de 2cm sur 32cm.

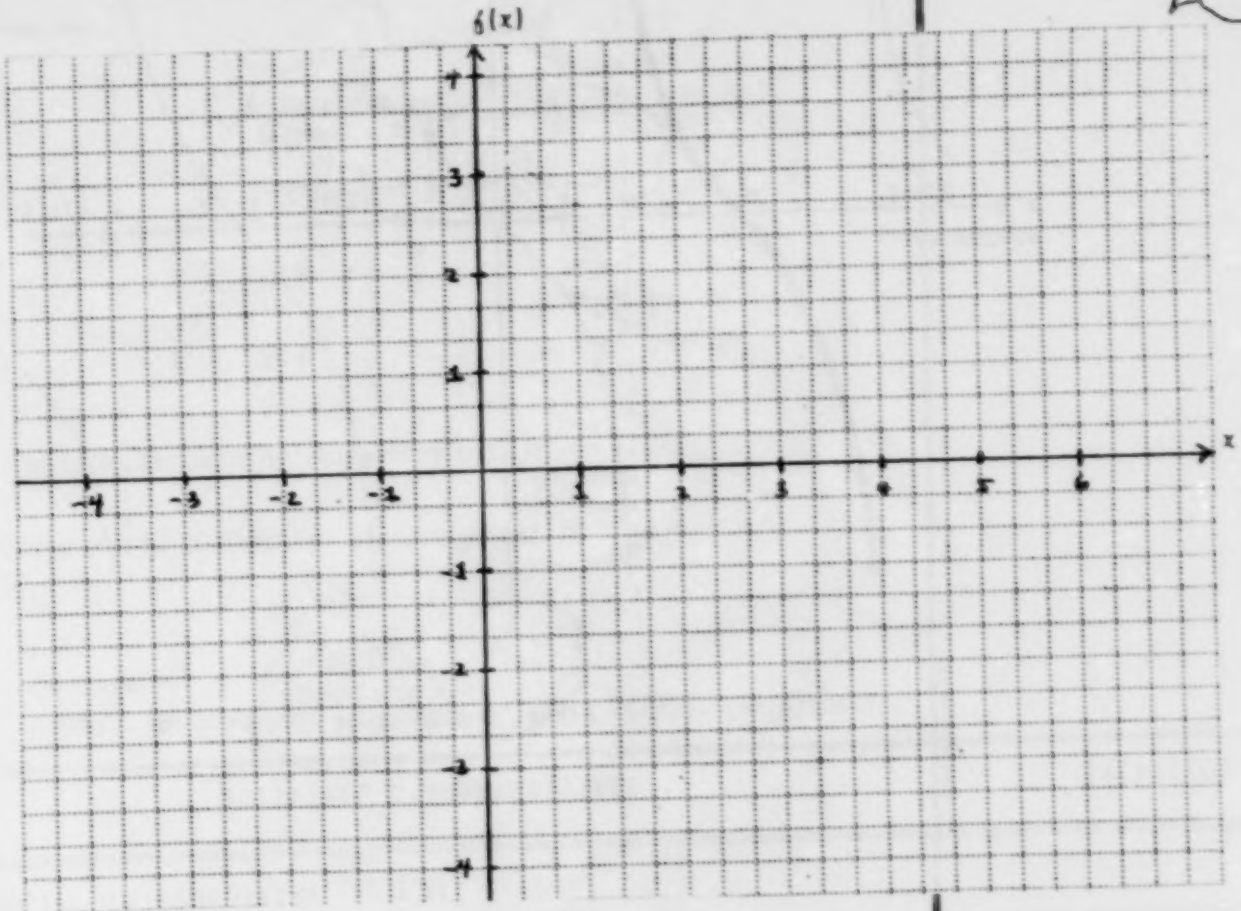


feuille millimétrique

Pour construire ce graphique, l'élève devrait utiliser le trigonographe qu'il a lui-même construit, ainsi que les valeurs déjà reportées sur le disque.

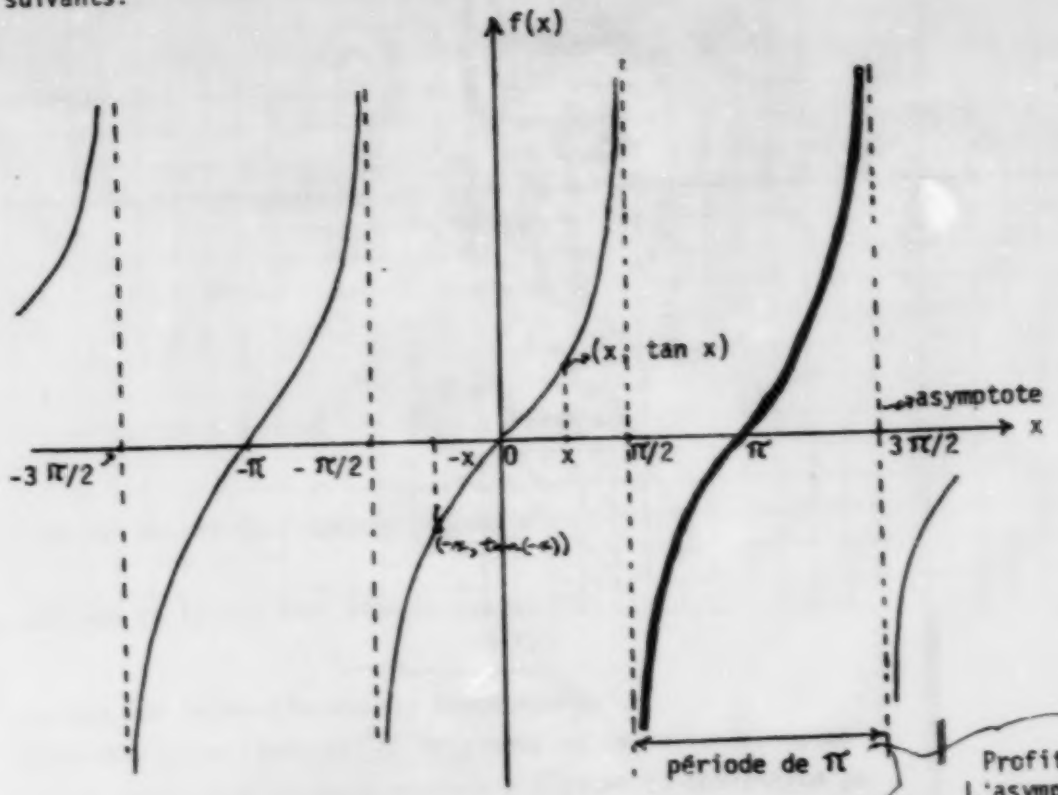
Cette construction est strictement géométrique et elle vise à faire prendre conscience à l'élève de l'allure de la courbe de la tangente.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Par la suite, l'enseignant demande à l'élève de construire le graphique de la tangente, en utilisant sa calculatrice et/ou le tableau des valeurs construit précédemment.	vérifier si l'élève utilise bien le mode radian sur sa calculatrice



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

A partir du graphique ainsi obtenu, faire dégager les éléments suivants:



Profiter de l'occasion pour définir «asymptote». L'asymptote d'une courbe est une droite de laquelle la courbe se rapproche, mais qu'elle n'atteint en aucun de ses points. L'asymptote constitue une limite du graphique d'une relation ou d'une fonction.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.8) TROUVER le domaine et l'image des fonctions sinus, cosinus ou tangente.	PAGE : 13

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

1. La fonction «tangente» est définie sur $\mathbb{R}$ <u>sauf</u> pour les zéros de la fonction «cosinus», c'est-à-dire pour tout x qui égale $(\frac{\pi}{2} + m.\pi)$, $m \in \mathbb{Z}$, qui associe le point P(x) sur l'axe des ordonnées.

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ où $\cos \neq 0$

Discuter cet élément avec les élèves, à l'aide du graphique de la fonction!

$\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + n.\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

ou

$\longrightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2n+1}{2}.\pi, n \in \mathbb{Z}\right\}$

2. L'image de la fonction «tangente» est $\mathbb{R}$.

3. La période de la fonction «tangente» est π

Le faire constater sur le graphique.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
4. La fonction «tangente» est croissante sur chacun des intervalles où elle est définie: $\ldots, \left]-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right[, \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[, \ldots$ 5. La fonction «tangente» n'a pas de maximum, ni de minimum. 6. La fonction «tangente» n'a pas d'amplitude, car elle n'a pas de maximum, ni de minimum. Les élèves effectuent les exercices ci-contre:	EXERCICES Soit la fonction h, définie par $h(x)=\sin x$. 1) Calcule: a) $h(0)$ d) $h(\frac{3\pi}{2})$ b) $h(\frac{\pi}{2})$ e) $h(\frac{5\pi}{6})$ c) $h(\pi)$ f) $h(2\pi)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	2) Dans le plan cartésien, trace la partie de la courbe de h, correspondant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ sur l'axe de x. 3) Calcule: a) $h\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ c) $h\left(\frac{7\pi}{2}\right)$ b) $h(3\pi)$ d) $h(4\pi)$ 4) Trace la partie de la courbe de h correspondant à l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$ sur l'axe des x. 5) Compare les deux parties de la courbe et indique la période de la fonction sinus. 6) Montre que $f(x + 2n \cdot \pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

2.3.9 DÉTERMINER le minimum ou le maximum des fonctions sinus ou cosinus.

2.3.10 L'une des fonctions sinus, cosinus ou tangente étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante dans un intervalle donné.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	Détermine la croissance et la décroissance des fonctions sin, cos et tan pour chacun des intervalles suivants: a) $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ c) $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ e) $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ b) $\left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$ d) $\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ PROBLÈMES Construis le graphique des fonctions: - sécante - cosécante - cotangente et détermine dans chacun des cas, - le domaine - l'image - la période - la croissance et la décroissance - le minimum et la maximum - l'amplitude.

SECTION 2

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

BLOC 5

OBJECTIFS 2.3.15

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.15)	EVALUER l'amplitude, la période, la fréquence ou le déphasage d'une fonction sinusoïdale.	PAGE: 1

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

NOTE À L'ENSEIGNANT

Dans cette section, on étudiera la fonction sinusoïdale, c'est-à-dire:

$$f(x) = A \sin(B(x-h)) + k$$

Dans un premier temps, on examinera l'influence de chacun des paramètres pris isolément, pour ensuite définir les différents concepts tels:

- l'amplitude
- la période
- la fréquence
- le déphasage

Dans un deuxième temps, on analysera différents problèmes de la vie courante faisant intervenir ces divers concepts.

Ex: Picasso.

L'utilisation de micro-ordinateurs s'avérerait très utile dans cette section, pour visualiser l'effet des différents paramètres!

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 1: LA FONCTION SINUSOÏDALE
INFLUENCE DU PARAMETRE A

Cette activité a pour but de faire constater à l'élève que le ~~paramètre~~ A contribue à DILATER ou CONTRACTER verticalement le graphique de la fonction sinusoïdale.

L'enseignant demande à l'élève de tracer les courbes de

$$\begin{bmatrix} \sin x \\ 2 \sin x \\ \frac{1}{2} \sin x \end{bmatrix}$$

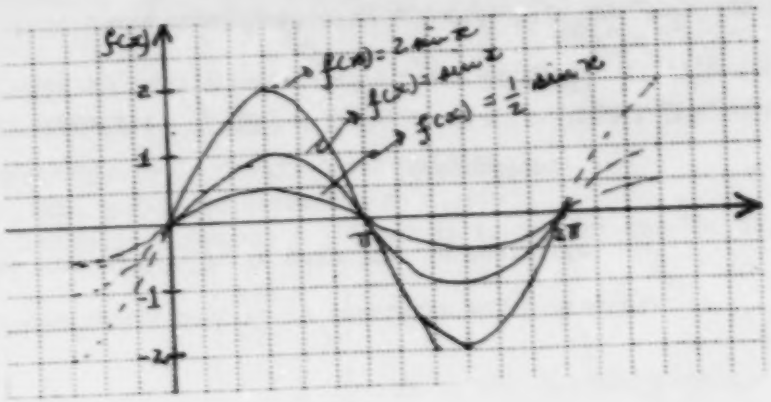
et ce sur le même graphique

C'est le temps d'utiliser efficacement la calculatrice!

(A) *Pour obtenir l'allure générale de chaque courbe, il faut trouver un minimum de points appartenant à cette courbe, y incluant certains points critiques.*

(B) *Il serait peut-être utile de fournir aux élèves un tableau des valeurs à trouver; ou de leur demander d'utiliser le tableau qu'ils ont eux-mêmes construit auparavant.*

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES



L'enseignant doit faire constater aux élèves que:

a) pour $0<A<1$, le graphique se contracte verticalement;

b) pour $A>1$, le graphique se dilate verticalement.

(Discussions)

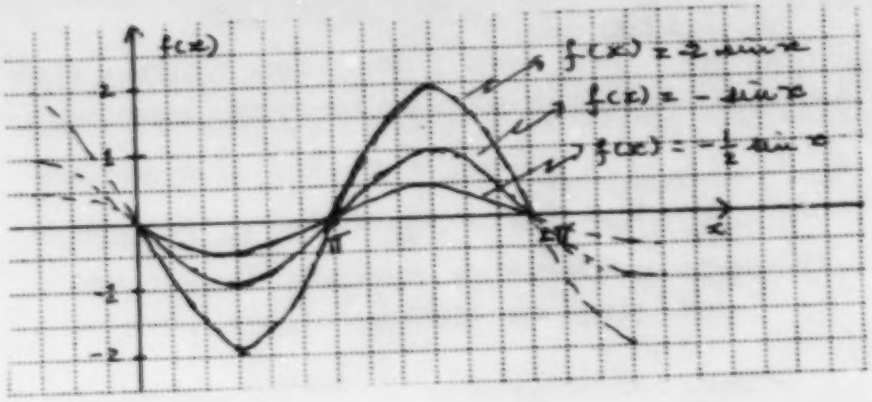
L'enseignant demande aux élèves ce qui se passerait si le paramètre A était un nombre négatif!!!

(Discussions)

L'enseignant demande aux élèves de tracer les courbes de

$$\begin{bmatrix} -2\sin x \\ -\sin x \\ -\frac{1}{2}\sin x \end{bmatrix}$$ sur le même graphique

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE



L'enseignant doit faire constater aux élèves que:

a) pour $-1<A<0$, le graphique se contracte;

b) pour $A<-1$, le graphique se dilate.
(discussions)

c) cependant , $f(x) = A \sin x$ $(A<0)$ a le signe contraire de sin x.

L'enseignant demande ensuite aux élèves de comparer les deux graphiques obtenus; l'élève devrait constater l'effet graphique du signe de A. En fait la courbe $f(x) = -A \sin x$ est l'image de la courbe de $f(x) = A \sin x$ pour une réflexion d'axe x, et inversement.

EXERCICES ET REFERENCES

Si $|A|>0$, alors le graphique se dilate verticalement;

Si $0<|A|<1$, alors le graphique se contracte verticalement.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 2: LA FONCTION SINUSOÏDALE
INFLUENCE DU PARAMETRE B

Cette activité a pour but de faire constater à l'élève que le paramètre B contribue à DILATER ou à CONTRACTER horizontalement le graphique de la fonction sinusoïdale.

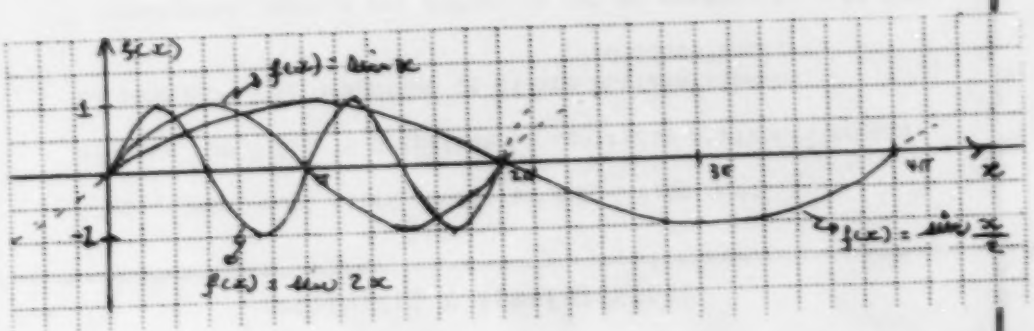
L'enseignant demande à l'élève de tracer les courbes de

$$\begin{bmatrix} \sin x \\ \sin 2x \\ \sin \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

et ce sur le même graphique

c'est encore le temps d'utiliser efficacement la calculatrice.

Les notes (A) et (B) demeurent encore valables...!



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant doit faire constater aux élèves que:

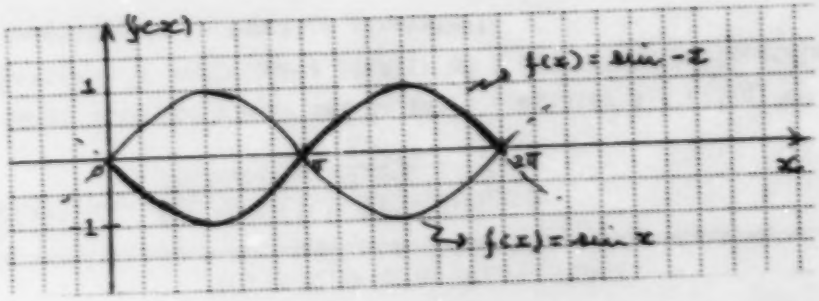
a) pour $0<B<1$, le graphique se contracte horizontalement;

b) pour $B>1$, le graphique se dilate horizontalement.
(discussions).

L'enseignant demande aux élèves ce qui se passerait si le paramètre B était un nombre négatif !!! (discussions)

L'enseignant demande aux élèves de tracer les courbes de

$$\begin{bmatrix} \sin x \\ \sin - x \end{bmatrix}$$ sur le même graphique.



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Les élèves devraient constater que:

a) le graphique de sin(-x) est identique au graphique de -sin x ;

b) La courbe de f(x) = sin Bx est l'image de la courbe de f(x) = sin Bx, par une réflexion d'axe x, et inversement.

Si $|B|>0$, alors le graphique se dilate horizontalement.

Si $0<|B|<1$, alors le graphique se dilate horizontalement.

EXERCICES ET REFERENCES

$$\begin{aligned}
\sin(-x) &= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - (-x)\right) \\
&= \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) \\
&= \cos\left(x - (-\tfrac{\pi}{2})\right) \\
&= \cos x \cdot \cos(-\tfrac{\pi}{2}) + \sin x \cdot \sin(-\tfrac{\pi}{2}) \\
&= \cos x \cdot 0 + \sin x \cdot (-1) \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 3: LA FONCTION SINUSOÏDALE
INFLUENCE DU PARAMETRE h

Cette activité a pour but de faire constater à l'élève que le paramètre h contribue à TRANSLATER horizontalement le graphique de la fonction sinusoïdale.

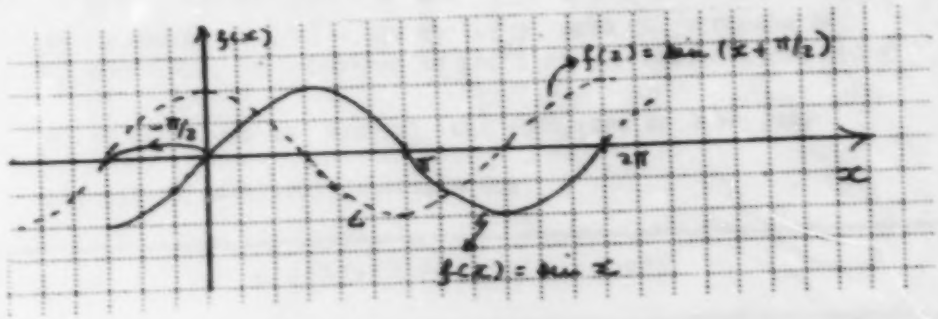
L'enseignant demande à l'élève de tracer:

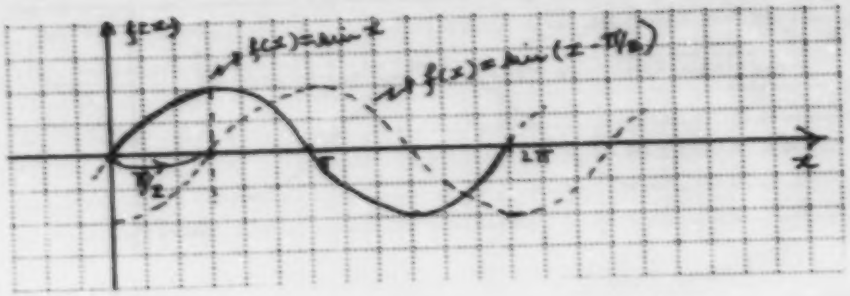
a) les courbes de $\begin{bmatrix} \sin x \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$

b) les courbes de $\begin{bmatrix} \sin x \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$

...deux graphiques différents...

a)



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
b)  L'enseignant doit faire constater aux élèves que: a) pour $h>0$, le graphique se translate horizontalement vers la droite ; b) pour $h<0$, le graphique se translate horizontalement vers la gauche.	

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

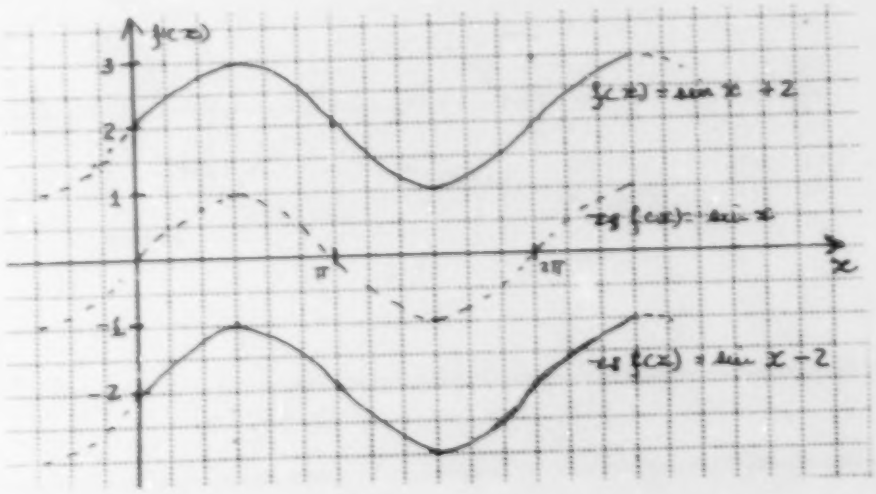
ACTIVITE 4: LA FONCTION SINUSOÏDALE
INFLUENCE DU PARAMETRE K

Cette activité a pour but de faire constater à l'élève que le paramètre K contribue à translater verticalement le graphique de la fonction sinusoïdale

L'enseignant demande à l'élève de tracer les courbes de

$$\begin{bmatrix} \sin x \\ \sin x + 2 \\ \sin x - 2 \end{bmatrix}$$

... sur le même graphique...



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
L'enseignant doit faire constater aux élèves que: a) pour $\kappa > 0$, le graphique se translate verticalement vers le haut; b) pour $\kappa < 0$, le graphique se translate verticalement vers le bas.	

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 5: CONCEPTS RELIÉS À LA FONCTION SINUSOÏDALE

La fonction sinusoïdale

$$f(x) = A \sin\left(B(x-h)\right) + k$$

possède une amplitude, une période, une fréquence et un déphasage

L'enseignant définit ces concepts en faisant le lien avec les activités précédentes qui ont mis en lumière l'influence des différents paramètres.

PÉRIODE ET FRÉQUENCE

Une fonction est périodique s'il existe un nombre p tel que $f(x) = f(x+p)$ pour tout $x \in$ dom f (p étant le plus petit nombre).

Le paramètre B qui contribue à dilater ou contracter horizontalement le graphique de la fonction sinusoïdale, permettra d'en évaluer la période:

$$p = \frac{2\pi}{|B|}$$

Revenir à l'activité 2 pour vérifier ce fait

NOTE: La fréquence d'une fonction, c'est l'inverse de la période:

fréquence: $\frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{2\pi}{|B|}} = \frac{|B|}{2\pi}$

En physique # d'oscillations par unité de temps

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

AMPLITUDE:

L'amplitude de la fonction sinusoïdale se calcule de la façon suivante:

$$\text{amplitude} = \left| \frac{\text{maximum } f(x) - \text{minimum } f(x)}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{M - m}{2} \right|$$

Dans la fonction sinusoïdale, $f(x) = A \sin(B(x-h)) + K$ on dira que l'amplitude correspond à $|A|$

Revoir l'activité 1 si nécessaire

DÉPHASAGE

On a vu que pris isolément le paramètre h contribue à translater (déphaser) une fonction périodique de h unités vers la gauche ou vers la droite selon que h 0 ou h 0.

Le déphasage correspond directement à la valeur de h.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 6: GRAPHE DE LA FONCTION $f(x) = A \sin(B(x-h)) + k$

Pour construire le graphique d'une fonction sinusoïdale, il s'agit de procéder par étape.

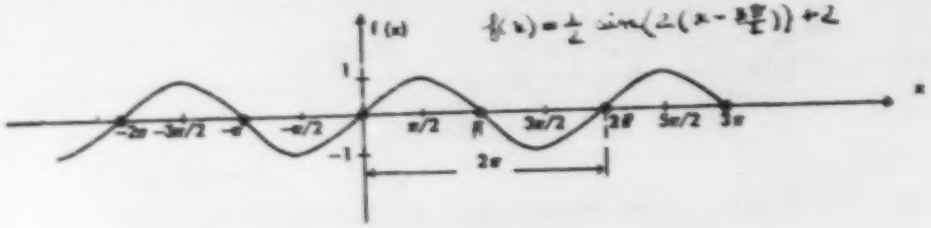
1. Tracer le graphique de $f(x) = \sin x$
2. Tracer le graphique de $f(x) = \sin Bx$ en tenant compte de la période $\frac{2\pi}{|B|}$
3. Tracer le graphique de $f(x) = \sin(B(x-h))$ en tenant compte du déphasage h
4. Tracer le graphique de $f(x) = A \sin(B(x-h))$ en tenant compte de l'amplitude A.
5. Tracer le graphique de $f(x) = A \sin(B(x-h)) + k$ en déplaçant la courbe obtenue précédemment de k unités suivant la verticale.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

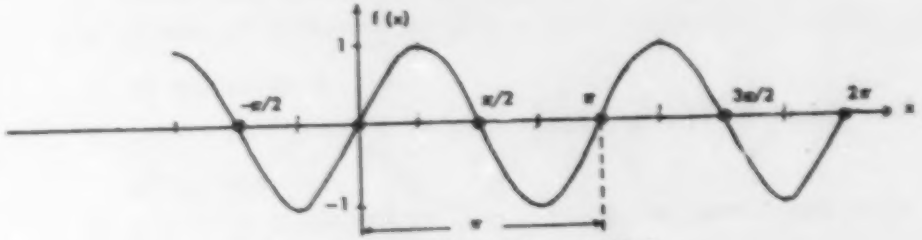
Exemple: Tracer le graphique de $f(x) = \frac{1}{2} \sin (2x - 3\pi) + 2$

ou

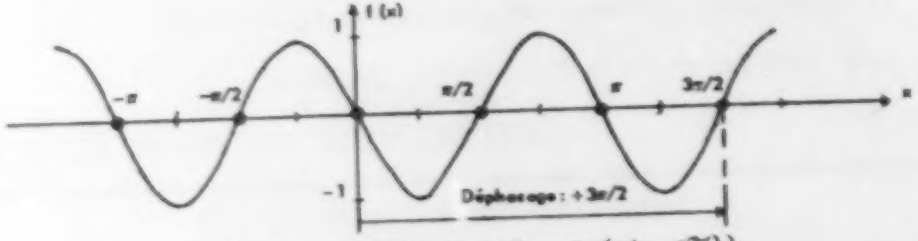
$f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\right) + 2$



1ère étape: GRAPHE DE $f(x) = \sin x$



2e étape: GRAPHE DE $f(x) = \sin (2x)$



3e étape: GRAPHE DE $f(x) = \sin\left(2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\right)$

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer

a) la période
b) la fréquence
c) l'amplitude
d) le déphasage
e) le graphique
f) le domaine et l'image

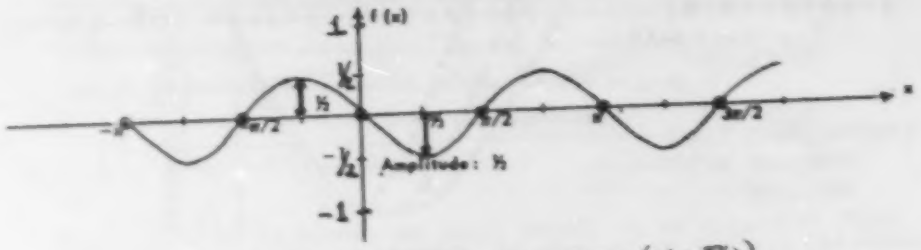
1. $f(x) = \sin (1/2\ x + \pi)$
2. $f(x) = 1/2 \sin (3x - \pi/2)$
3. $f(x) = 2 \sin (2x + 1)$
4. $f(x) = 3 \sin (1/3\ x + \pi/5)$
5. $f(x) = 3 \sin (2x - \pi)$
6. $f(x) = 3 \sin (2x - \pi/2) + 2$

etc...

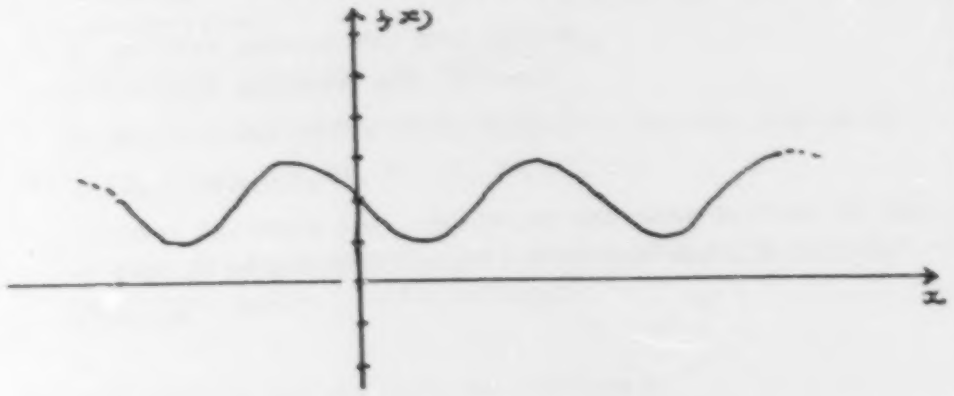
Ne pas oublier de leur faire écrire sous la forme $f(x) = A \sin(B(x - h)) + k$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES



4e étape: GRAPHE DE $f(x) = \frac{1}{2} \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$



5e étane: GRAPHE DE $f(x) = 1/2 \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 7: APPLICATION

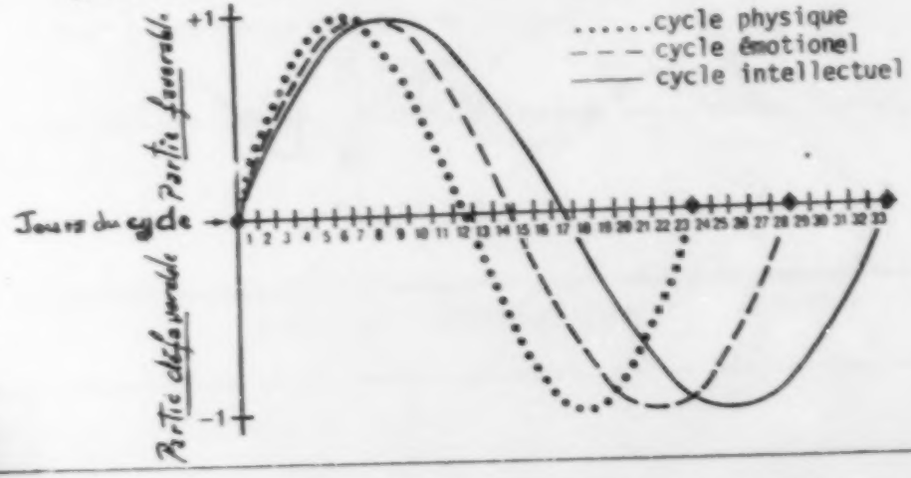
Cette activité a pour but de montrer divers phénomènes qui sont traduits par une fonction sinusoïdale.

1) BIORYTHME

La théorie du Biorythme repose sur le fait que trois cycles influent sur notre vie. Ces cycles ont leurs origines au jour de notre naissance.

1. le cycle physique dure 23 jours
2. le cycle émotionel dure 28 jours
3. le cycle intellectuel dure 33 jours

La première moitié de chaque cycle est considérée comme étant la «partie favorable» et la deuxième moitié, la «partie dévavorable».



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Pour tracer les courbes point par point, on utilise la relation suivante : Valeur du biorythme en un point donné = $\sin(360 \cdot d)$ où d représente la partie décimale du résultat : $\left[\left(\frac{\text{Nombre de jours depuis la naissance}}{\text{durée du cycle}}\right) \div 360\right]$ Pour calculer le nombre de jours depuis la naissance il faut: - calculer le nombre de jours depuis votre dernier anniversaire. - multiplier votre âge par 365 - ajouter 1 pour chaque année bissextile que vous avez vécue. (48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84) La somme des trois nombres ainsi obtenus vous donne le nombre de jours vécus depuis votre naissance.	Tracer les trois courbes de votre Biorythme.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

2) MOUVEMENT HARMONIQUE SIMPLE

Dans la figure 1 ci-dessous, un objet est attaché à un ressort et il pend au repos (position 0). Quand le ressort est tendu dans la position A (figure 2) et ensuite relâché, l'objet oscillera ou voyagera de bas en haut à plusieurs reprises. Le déplacement maximum de l'objet en haut et en bas de sa position 0 est de A unités. L'objet est en mouvement périodique simple ou mouvement harmonique simple, aussi longtemps que toute autre force extérieure telle la friction, change le mouvement. Si nous pouvions photographier les mouvements de l'objet à des intervalles de temps égaux, le résultat serait la figure 3.

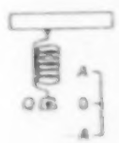


Figure 1

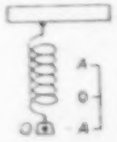


Figure 2

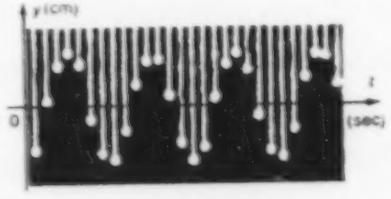


Figure 3

La forme sinusoïdale du graphique suggère que la position de l'objet est une fonction de temps:

$$y = A \sin B\,(t-\lambda),\ t \geq 0$$

EXERCICES ET REFERENCES

Exercice:

Dans la figure de droite, une balle spérique oscille en mouvement harmonique simple. La sphère est montrée à son point le plus bas dans le cycle. A ce point, t = 0. La sphère complète 1/2 cycle en une seconde. Fais le graphique de la position verticale de la sphère comme une fonction verticale de la sphère comme une fonction de temps.

Sachant que l'équation représentant ce phénomène est $y = 12 \sin \pi (t - 1/2)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

3) SON

Les vibrations, telles que celles créées par les cordes d'une guitare, produisent le son. Le son, en retour, peut être converti en image graphique sur une télévision tel l'écran d'un oscilloscope.

Si l'image graphique a une forme sinusoïdale, alors le son est appelé «son simple» et peut être représenté par une équation de la forme: $y = A \sin Bt,\ t \geq 0$

où $|A|$ est l'amplitude et t est le temps en seconde. Les fréquences des vibrations sont données par la formule:

$$f = \frac{|B|}{2\pi}$$

où B est le coefficient de t dans l'équation $y = A \sin Bt$.
Un exemple de son simple est «C milieu» sur l'échelle musicale. C milieu a une fréquence de 264 cycles par seconde.

Exemple:

Ecris une équation de la forme $y = A \sin Bt$ pour une image d'oscilloscope de C milieu. Assume que l'amplitude est d'une unité.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Solution:

Puisque l'amplitude $|A|$ est 1, alors $A = 1$ ou $A = -1$. Pour faciliter les calculs, on prendra $A = 1$.

La fréquence est 264 cycles par seconde. Alors

$$f = \frac{|B|}{2\pi}$$

Alors $|B| = 2\pi f$

Ainsi $|B| = 2\pi (264)$

$= 528\pi$

$B = 528\pi$ ou $B = -528$

De plus, $y = \sin 528\pi t$

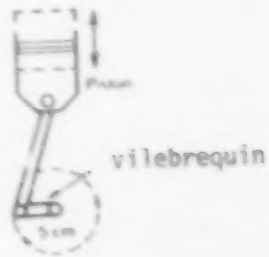
ou $y = -\sin 528\pi t$

qui sont les équations possibles pour une image d'oscilloscope de «C milieu».

EXERCICES ET REFERENCES

Exercice

Trace les graphiques des deux fonctions de l'exemple.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
4) PISTON Un piston d'un moteur est relié à un vilebrequin par une tige. Quand le vilebrequin tourne à une vitesse constante, le piston monte et descend dans son cylindre en mouvement harmonique simple. Par exemple, dans un moteur dont le rayon du vilebrequin est 5 cm et que celui-ci tourne 20 révolutions par seconde, la distance entre le piston et sa position centrale est donnée par $d = 5 \sin 40\pi t$ où d est la distance en centimètres et t est le temps en secondes.  5) MOUVEMENT DES MARÉES Les données recueillies par des océanographes sur la hauteur des marées dans un intervalle de temps spécifique ont permis de définir une fonction $h = f(t)$.	Exercice Construis le graphique représentant cette situation.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Cette fonction périodique se rapproche du modèle mathématique suivant: $h = 3 \sin \frac{24\pi}{149} t + 2$	Exercice Quelle est la représentation graphique de cette fonction?

SECTION 2

BLOC 6

OBJECTIFS 2.3.11 - 2.3.12
2.3.13

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

2.3.11: TRACER le graphique cartésien de la réciproque des fonctions sinus, cosinus ou tangente.

2.3.12: TROUVER le domaine et l'image des fonctions arc sinus, arc cosinus ou arc tangente.

2.3.13: L'une des fonctions arc sinus, arc cosinus ou arc tangente étant donnée, DÉTERMINER si elle est croissante ou décroissante sur un intervalle donné.

ACTIVITÉS D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET RÉFÉRENCES
INTRODUCTION La réciproque d'une fonction (f^{-1}) n'est pas toujours une fonction. Les fonctions trigonométriques étant périodiques, elles prennent plusieurs fois les mêmes valeurs. Comme elles ne sont pas injectives, les réciproques de ces fonctions sont des relations non fonctionnelles. C'est en restreignant le domaine des fonctions trigonométriques que l'on définira arc sin x, arc cos x et arc tan x.	*Rappeler au besoin que la réciproque d'une fonction* $f = \{(x,y) \in A \times B \mid y = f(x)\}$ *est* $f^{-1} = \{(x,y) \in B \times A \mid x = f(y)\}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 1: LA FONCTION ARC SINUS

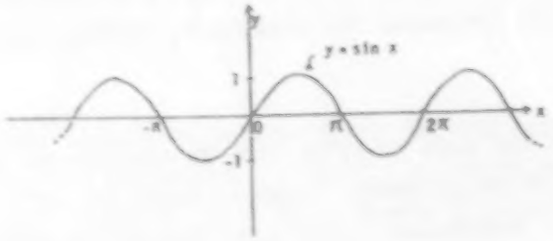
L'enseignant fait construire le graphique de la fonction sinus

$f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sin x\}$

et le graphique de sa réciproque

$$f^{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \sin y\}$$

x	...	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π ....
y	...	-1	0	1	0	-1	0 .....



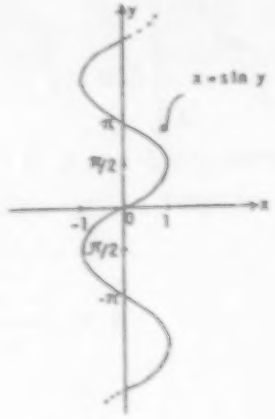
On peut tout simplement inverser les couples...

OBJECTIF INTERMEDIAIRE

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Soit $x = \sin y$

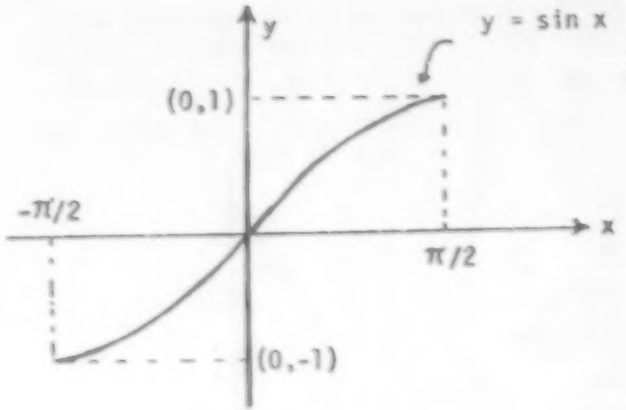
x	y
.	.
.	.
.	.
-1	$-\pi/2$
0	0
1	$\pi/2$
0	π
-1	$3\pi/2$
0	2π
.	.
.	.
.	.

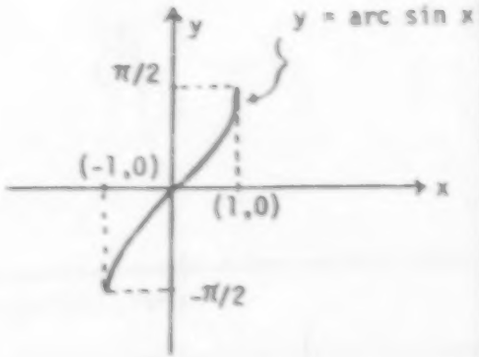


Faire observer que la réciproque n'est pas une fonction. Pour remédier à cet inconvénient, il suffit de restreindre le domaine de la fonction sinus de façon à la rendre injective.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

En limitant le domaine à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ la réciproque $\sin^{-1}x$ ou arc sin x sera une fonction.





EXERCICES ET REFERENCES

Le choix des restrictions pour les images n'est évidemment pas unique. Cependant, c'est le choix le plus utilisé.

Exercices

Evalue:

1) $\sin^{-1}(1)$
2) arc sin(-1)
3) arc sin $(\frac{\sqrt{3}}{2})$
4) 1/3 arc sin $(\frac{1}{2})$

....

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Terminer cette activité en faisant réaliser que: dom (sin) = ima (arc sin) = $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ima (sin) = dom (arc sin) = $[-1, 1]$ De plus, montrer que la fonction sin x est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tandis que la fonction arc sin x est croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$.	faire observer que $\sin^{-1} x = \text{arc sin } x$ et $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \cos x$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

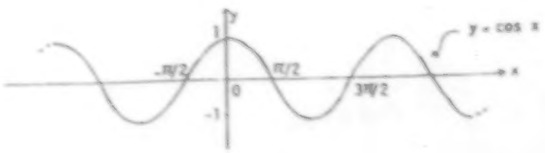
ACTIVITE 2 : LA FONCTION ARC COSINUS

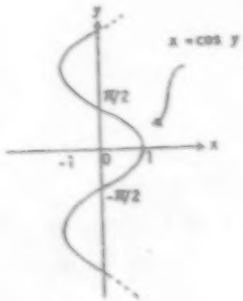
L'enseignant fait construire le graphique de la fonction cosinus

$f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \cos x\right\}$

et le graphique de sa réciproque

$f^{-1} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \cos y\right\}$



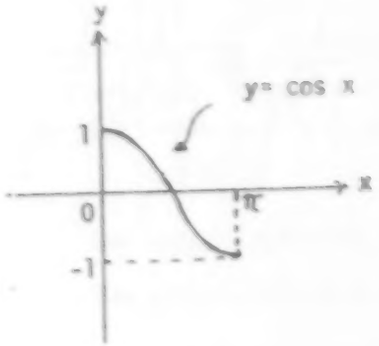


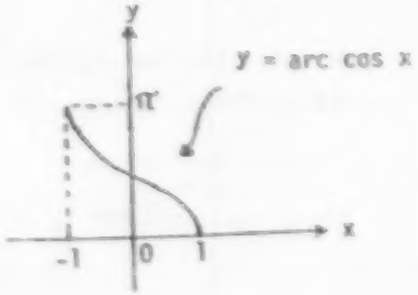
Faire observer que la réciproque n'est pas une fonction.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Pour remédier à cet inconvénient, il suffit de restreindre le domaine de la fonction cosinus de façon à la rendre injective.

En limitant le domaine à l'intervalle $[0, \pi]$ la réciproque $\cos^{-1}x$ ou arc cos x sera une fonction.





Exercices

Evalue:

1) arc cos 0

2) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

3) $3 \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \arccos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

4) $\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

....

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 8

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Terminer cette activité en faisant réaliser que: dom (cos) = ima (arc cos) = $[0, \pi]$ ima (cos) = dom (arc cos) = $[-1, 1]$ De plus, montrer que la fonction cos x est décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$ tandis que la fonction arc cos x est décroissante sur l'intervalle $[-1, 1]$.	

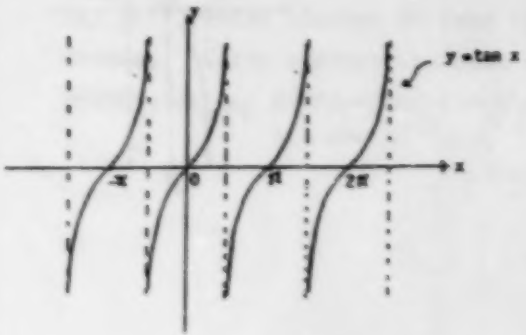
OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 9

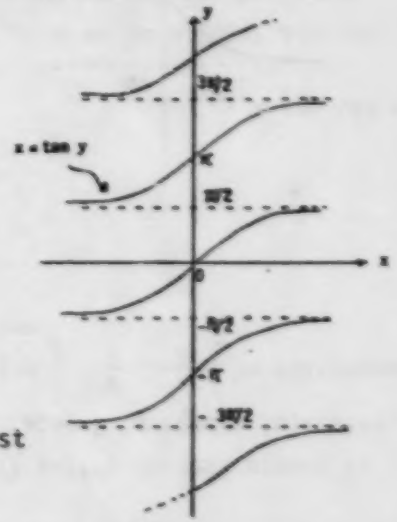
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 3: LA FONCTION ARC TANGENTE

L'enseignant fait construire le graphique de la fonction tangente $f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \tan x \right\}$ et le graphique de sa réciproque

$$f^{-1} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = \tan y \right\}$$



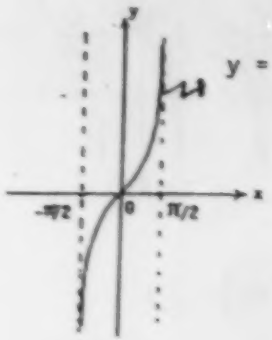


Faire observer que la réciproque n'est pas une fonction.

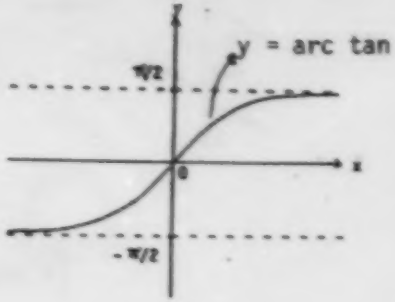
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Pour remédier à cet inconvénient, il suffit de restreindre le domaine de la fonction tangente de façon à la rendre injective.

En limitant le domaine à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la réciproque $\tan^{-1}x$ ou arc tan x sera une fonction.



y = tan x



y = arc tan x

Exercice

Evalue:

1) arc tan 1

2) arc tan $\sqrt{3}$

3) arc tan 0

...

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 11

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Terminer cette activité en faisant réaliser que: dom (tan) = ima (arc tan) = $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ima (tan) = dom (arc tan) = $\mathbb{R}$ ACTIVITE 4: APPLICATIONS Avant de passer aux exercices, les élèves devraient explorer les différentes touches de leur calculatrice reliées aux réciproques. Cette exploration peut se faire en se guidant sur les graphiques des différentes fonctions.	*Attention aux différentes notations qu'utilisent les calculatrices...*

OBJECTIF INTERMEDIAIRE	PAGE: 12

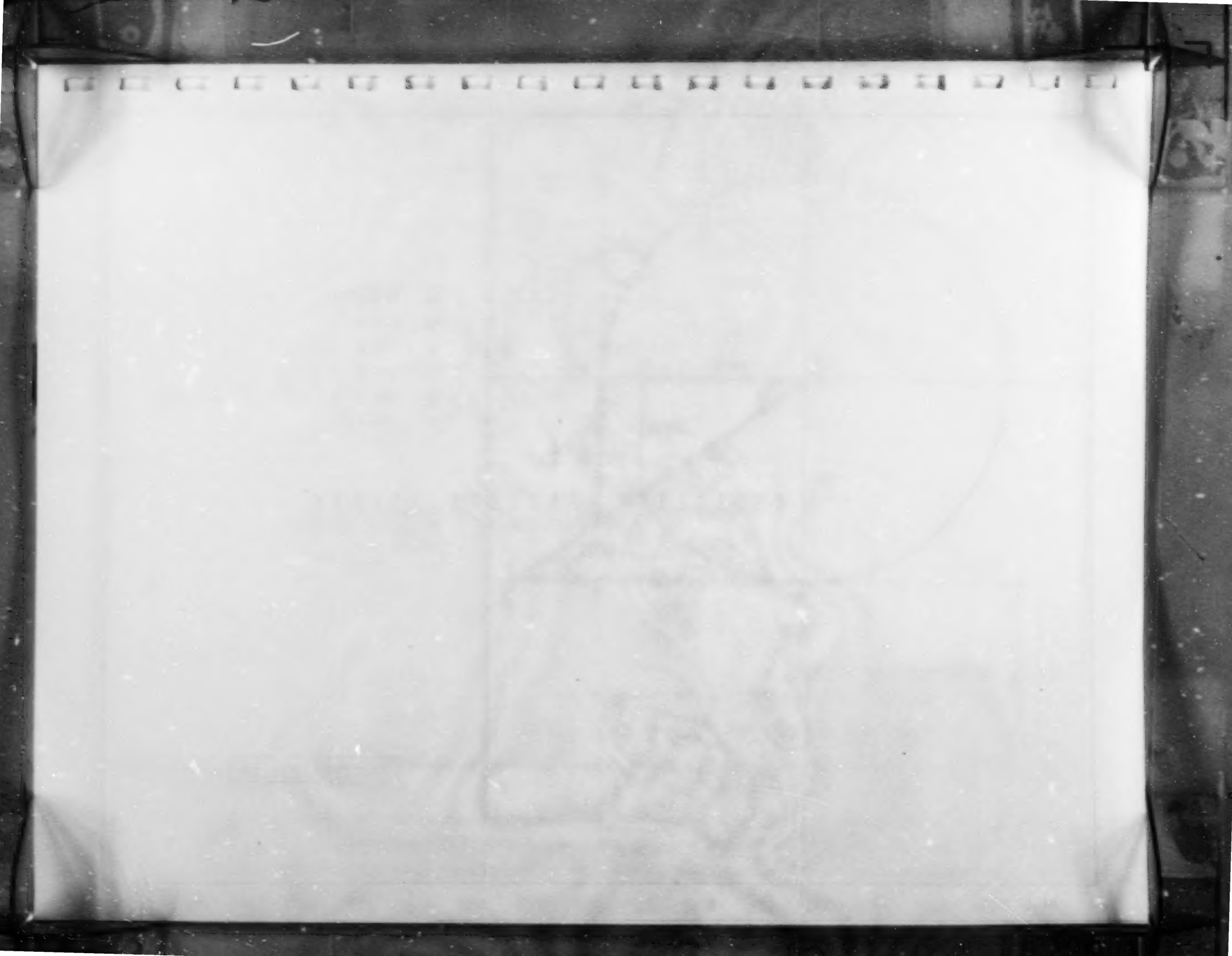
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Proposer ensuite des exercices du même genre que ci-contre.	- Trouve un nombre réel équivalent à : a) $\sin(\text{arc}\sin\frac{1}{2})$ b) $\sin(\text{arc}\cos\frac{1}{2})$ c) $\cos(\text{arc}\sin\frac{\sqrt{3}}{2})$ d) $\tan(\text{arc}\tan(1))$ .... - Trouve le nombre réel équivalent à: a) $\cos(\text{arc}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}))$ b) $\tan(\text{arc}\sin(-\frac{1}{2}))$ c) $\sin(\text{arc}\sin(1) - \text{arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{2})$ - Evalue a) $\text{arc}\sin(\cos\frac{\pi}{6})$ b) $\text{arc}\cos(\sin\frac{\pi}{4})$ c) $\text{arc}\cos(\cos(-\frac{3\pi}{2}))$ ...

SECTION 2

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

BLOC 7

OBJECTIF 2.3.14

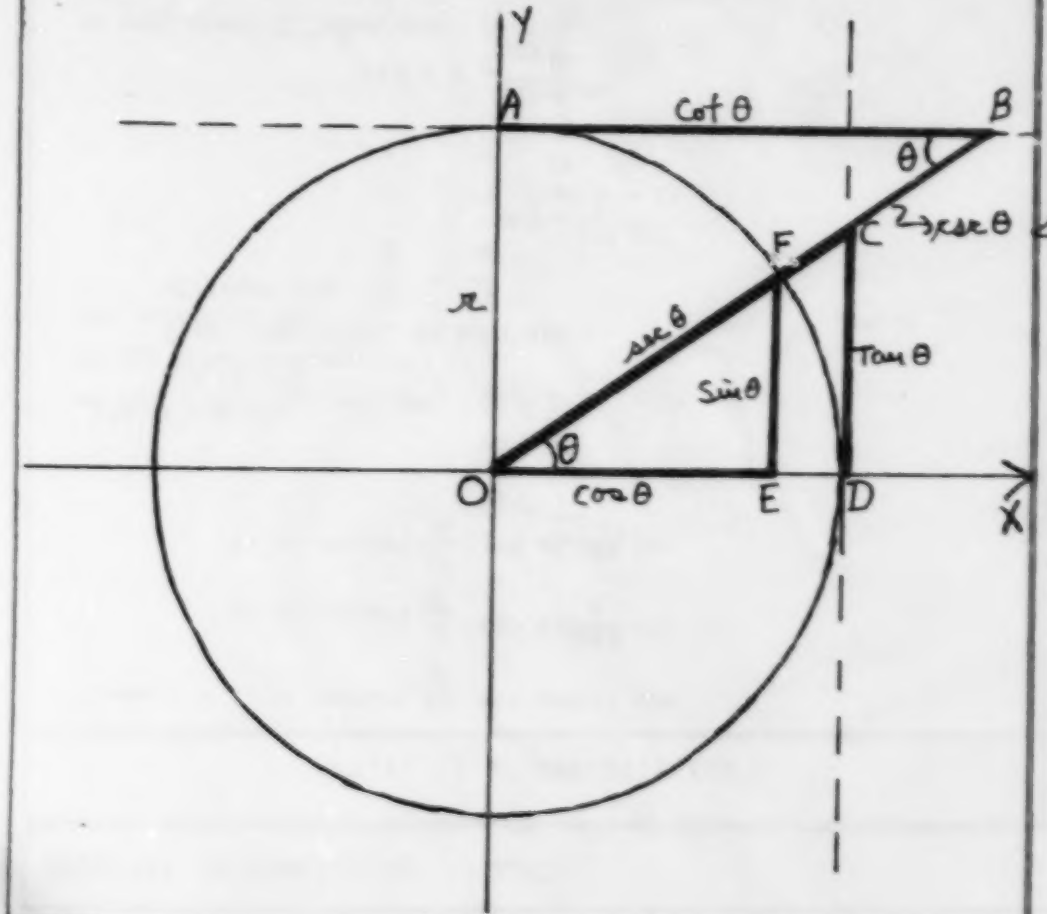


OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.14) Démontrer l'identité d'expressions trigonométriques	PAGE: 1

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 1: RAPPEL DES RELATIONS DE BASE

L'enseignant, à l'aide du cercle trigonométrique, rappelle les définitions des fonctions de base.



Mettre ce graphique sur une acétate

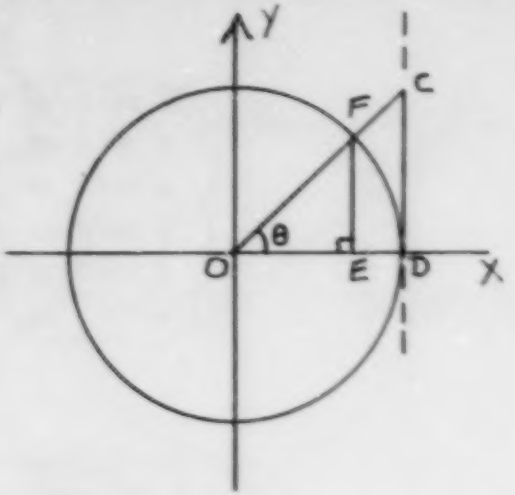
EF : sin θ
OE : cos θ
CD : tan θ
OC : sec θ
OB : csc θ
AB : cot θ

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Comme r = 1, le rapport $\frac{FE}{OF}$ est appelé sin

et le rapport $\frac{OE}{OF}$ est appelé cos

et le rapport $\frac{EF}{OE}$ est appelé tan



Les triangles

OCD et OFE

étant semblables, on peut alors affirmer que: $\frac{CD}{OD} = \frac{FE}{OE}$

$$\frac{CD}{1} = \frac{FE}{OE} \quad (\text{car } r = 1)$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Ce sont les trois relations de base

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 2: RAPPEL DES RELATIONS INVERSES

L'enseignant rappelle les définitions des relations inverses.

Les triangles OCD
et OFE étant semblables,
on peut alors affirmer que: $\frac{OC}{OF} = \frac{OD}{OE}$

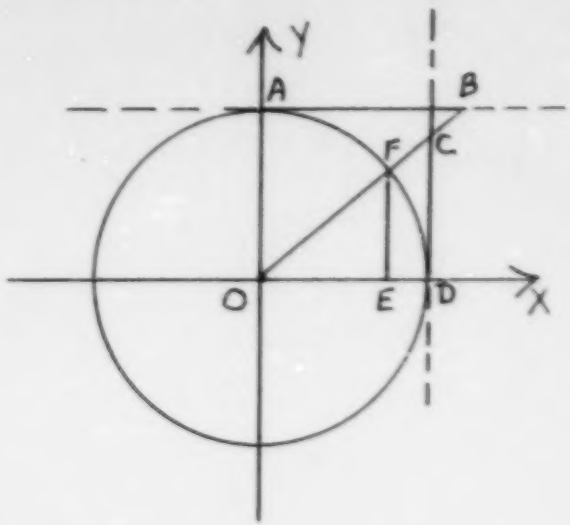
$$\frac{OC}{1} = \frac{1}{OE} \quad (\text{car } r = 1)$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

Les triangles OAB
et OFE étant semblables,
on peut alors affirmer que: $\frac{OB}{AO} = \frac{OF}{FE}$

$$\frac{OB}{1} = \frac{1}{FE} \quad (\text{car } r = 1)$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Les triangles OCD et OAB étant semblables, on peut alors affirmer que: $\frac{AB}{AO} = \frac{OD}{CD}$ $\frac{AB}{1} = \frac{1}{CD}$ (car $r = 1$) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ et $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ L'enseignant résume l'ensemble des six relations de base.	

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 3: D'AUTRES RELATIONS

On peut déduire une autre relation en se basant sur le cercle trigonométrique, soit sur la relation définissant le cercle trigonométrique

On sait que cette relation est: $x^2 + y^2 = 1$
et que $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$

ainsi: $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
ou
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Ecriture habituelle

De cette relation que l'on appelle

l'IDENTITE FONDAMENTALE

je peux déduire que:

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$
$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$
$$\cos\theta = \pm \sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$\sin\theta = \pm \sqrt{1-\cos^2\theta}$$

Rappeler la signification du ±

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

De l'identité fondamentale, je peux déduire cette autre relation:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\boxed{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta}$$

En divisant chaque terme par $\cos^2\theta$ ($\cos^2\theta \neq 0$)

Pour une meilleure compréhension, l'enseignant déduit cette autre relation, à partir du cercle trigonométrique.

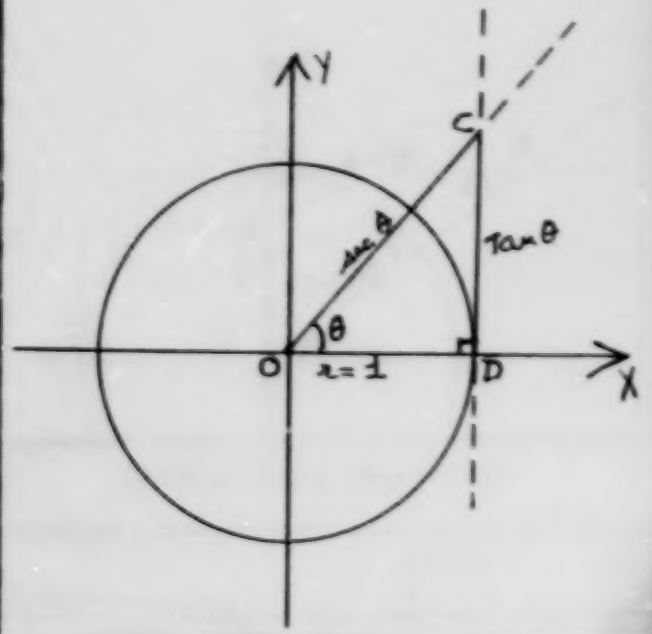
$$OD^2 + CD^2 = OC^2$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

Par la relation de Pythagore

Cette façon de faire sera peut-être plus évidente pour un bon nombre d'élèves

Elle a du moins le mérite et la qualité de ne pas être déduite algébriquement!



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

De l'identité fondamentale, je peux déduire cette autre relation:

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

en divisant chaque terme par $\sin^2\theta$ $(\sin^2\theta \neq 0)$

$$\downarrow$$

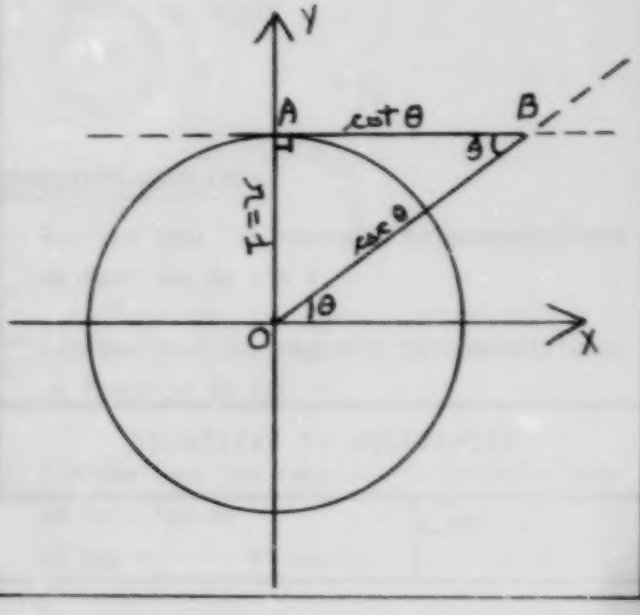
$$\boxed{\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta}$$

Pour une meilleure compréhension, l'enseignant déduit cette autre relation à partir du cercle trigonométrique.

$$AB^2 + OA^2 = OB^2$$

$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

Cette déduction est géométrique et est faite à partir de la relation de Pythagore



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

A partir des deux dernières relations, on peut déduire plusieurs relations connexes.

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $\qquad$ $\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$ $\qquad$ $\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

$\tan\theta = \pm\sqrt{\sec^2\theta - 1}$ $\qquad$ $\cot\theta = \pm\sqrt{\csc^2\theta - 1}$

$\sec\theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$ $\qquad$ $\csc\theta = \pm\sqrt{\cot^2\theta + 1}$

En conclusion,

On peut se servir des différentes relations vues précédemment pour exprimer chacun des six rapports trigonométriques en fonction d'une seule de ces fonctions.

Exemple: Exprime tous les rapports trigonométriques en fonction de $\tan\theta$.

(1) $\tan\theta = \tan\theta$

(2) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

L'enseignant répond à cette question avec l'aide des élèves

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

③ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\sec\theta = \pm\sqrt{1+\tan^2\theta}$

④ $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

⑤ $\sin\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta = \tan\theta \cdot \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

$= \dfrac{\tan\theta}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}$

⑥ $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\dfrac{\tan\theta}{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}} = \dfrac{\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$

Les élèves effectuent les exercices ci-contre.

EXERCICES ET REFERENCES

EXERCICES-PROBLÈMES

1) Exprime tous les rapports trigonométriques en fonction de sin θ.

2) Exprime tous les rapports trigonométriques en fonction de cos θ.

3) Exprime tous les rapports trigonométriques en fonction de

a) csc θ b) sec θ c) cot θ

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

4) Par quel rapport équivalent peut-on remplacer chacune des expressions suivantes?

a) $\sin^2\theta$ d) $\frac{1}{\tan\theta}$ g) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

b) $\frac{1}{\sin\theta}$ e) $\sec^2\theta$ h) $\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

c) $\frac{1}{\cos\theta}$ f) $\csc^2\theta$ i) $\tan^2\theta$

5) Trouve une expression équivalente plus simple.

a) $1 - \sin^2 t$ b) $\sqrt{1 - \cos^2 t}$

c) $\sqrt{1 - \sin^2 t}$ d) $\sqrt{tg^2\ t + 1}$

e) $\frac{\sin t}{\cos t}$ f) $\sec^2 t - 1$

g) $\sqrt{\cot^2 t + 1}$ h) $\sqrt{\sec^2 t - 1}$

i) $1/\sin t$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

6) Exprime en fonction de $\sin\theta$ ou $\cos\theta$ seulement.

a) $\frac{\sin\theta}{\csc\theta}$ b) $\frac{\cos\theta}{\sec\theta}$

c) $\sec\theta \cdot \csc\theta$ d) $\tan\theta + \cot\theta$

e) $\frac{1-\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$ f) $(\tan^2\theta + 1) \cdot \cos\theta$

g) $\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}$ h) $\tan^2\theta + 1$

7) Exprime en termes de $\sin\theta$.

a) $\cos\theta$ b) $\tan\theta$ c) $\csc\theta$

8) Exprime en termes de $\cos$.

a) $\sin\theta$ c) $\csc\theta$

b) $\sec\theta$ d) $\tan^2\theta$

9) Exprime en termes de $\sin\theta$

a) cosec θ f) $\cos\theta$. $\cot\theta$

b) $\cos^2\theta$ g) $\tan\theta$. $\sec\theta$

c) $\tan^2\theta$ h) cosec θ .sec θ

d) $\cot^2\theta$ i) $1 + \cot^2\theta$

e) $\sec^2\theta$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
ACTIVITE 4: COMMENT RÉSOUDRE UNE IDENTITÉ L'enseignant définit d'abord ce qu'est une identité: «Une identité, c'est une égalité, entre deux expressions, qui reste toujours vraie pour toutes les valeurs que l'on peut attribuer aux inconnues» (c'est une tautologie). Ex: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ *Faire la distinction entre une égalité et une identité entre deux formes propositionnelles données*	10) Simplifie chacune des expressions a) $\cos\theta \cdot \csc\theta$ b) $\cot\theta \cdot \sin\theta$ c) $\sin\theta \cdot \sec\theta \cdot \cot\theta$ d) $\csc\theta \cdot \tan\theta \cdot \cos\theta$ e) $\tan\theta \cdot \sqrt{1 - \sin^2\theta}$ f) $\csc\theta \cdot \sqrt{1 \cos^2\theta}$ g) $(1 + \tan^2\theta) \cdot \cos^2\theta$ h) $\sin^2\theta \cdot (1 + \cot^2\theta)$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.14)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Procédure à suivre

a) transformer ~~un des deux membres~~ pour le rendre semblable à celui qui reste intact.

~~b) transformer les deux membres afin qu'ils deviennent identiques.~~

c) éviter de faire intervenir des radicaux sans nécessité.

d) remplacer chaque rapport par sin ou cos si je ne puis faire autrement.

À l'aide d'exemples judicieusement choisis, l'enseignant explique cette procédure!

Exemple 1

$(1 - \cos\theta) \cdot \sec\theta = \sec\theta - 1$

$\sec\theta - \cos\theta \cdot \sec\theta = \sec\theta - 1$

$\sec\theta - \cancel{\cos\theta} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos\theta}} = \sec\theta - 1$

$\sec\theta - 1 = \sec\theta - 1$

Insister sur la précision et la clarté dans les transformations

Préconiser l'utilisation de la flèche (↓) pour identifier le lieu de la transformation

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Example 2

$$\sec\theta - \cos\theta = \sin\theta \cdot \tan\theta$$

$$\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \sin\theta \cdot \tan\theta$$

$$\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \cdot \tan\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - \cos^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \cdot \tan\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \cdot \tan\theta$$

$$\sin\theta \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \cdot \tan\theta$$

$$\sin\theta \cdot \tan\theta = \sin\theta \cdot \tan\theta$$

Exemple 3

$$\sqrt{1 + \cot^2\theta} \cdot \sqrt{\sec^2\theta - 1} \cdot \sqrt{1 - \sin^2\theta} = 1$$

$$\operatorname{cosec}\theta \cdot \tan\theta \cdot \cos\theta = 1$$

$$\frac{1}{\cancel{\sin\theta}} \cdot \frac{\cancel{\sin\theta}}{\cancel{\cos\theta}} \cdot \cancel{\cos\theta} = 1$$

$$1 = 1$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Exemple 4

$$\cos^2\theta \cdot (\sec^2\theta = \tan^2\theta) + \sin^2\theta \cdot (\csc^2\theta - \cot^2\theta) = 1$$

$$\cos^2\theta \cdot 1 \qquad + \sin^2\theta \cdot 1 = 1$$

et

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Exemple 5

$$\frac{\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1+\cot^2\theta}{\cot^2\theta} = \sin^2\theta \cdot \sec^2\theta$$

$$\frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta} \cdot \frac{\csc^2\theta}{\cot^2\theta} = \sin^2\theta \cdot \sec^2\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta.\sec^2\theta} \cdot \frac{\csc^2\theta}{\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}} = \sin^2\theta \cdot \sec^2\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta.\sec^2\theta} \cdot \frac{\csc^2\theta.\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \sin^2\theta \cdot \sec^2\theta$$

$$\frac{\sin^2\theta \cdot \cancel{\cos^2\theta}}{\cancel{\cos^2\theta}} \cdot \frac{\cancel{\sin^2\theta}}{\cancel{\sin^2\theta} \cdot \cos^2\theta} = \sin^2\theta \cdot \sec^2\theta$$

$$\sin^2\theta \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} = \sin^2\theta \cdot \sec^2\theta$$

$$\sin^2\theta \cdot \sec^2\theta = \sin^2\theta \cdot \sec^2\theta$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

PROBLÈMES

1) Vérifie les identités suivantes:

a) $\sin^2\theta \cdot \sec^2\theta = \sec^2\theta - 1$

b) $(1 + \tan^2\theta)(1 - \sin^2\theta) = 1$

c) $\sin^2\theta \cdot \cot^2\theta + \sin^2\theta = 1$

d) $(1 - \cos^2 A)(1 + \cot^2 A) = 1$

e) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\csc^2 A} = 1$

f) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

g) $\frac{\sin A}{\csc A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$

h) $\frac{1}{1 - \sin A} + \frac{1}{1 + \sin A} = 2\sec^2 A$

i) $\frac{\tan A}{\sec A - 1} + \frac{\tan A}{\sec A + 1} = 2\csc\theta$

j) $\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \csc^2 A} = 1$

k) $\frac{\cos\theta}{\sec\theta - \tan\theta} = 1 + \sin\theta$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.4)	PAGE: 17

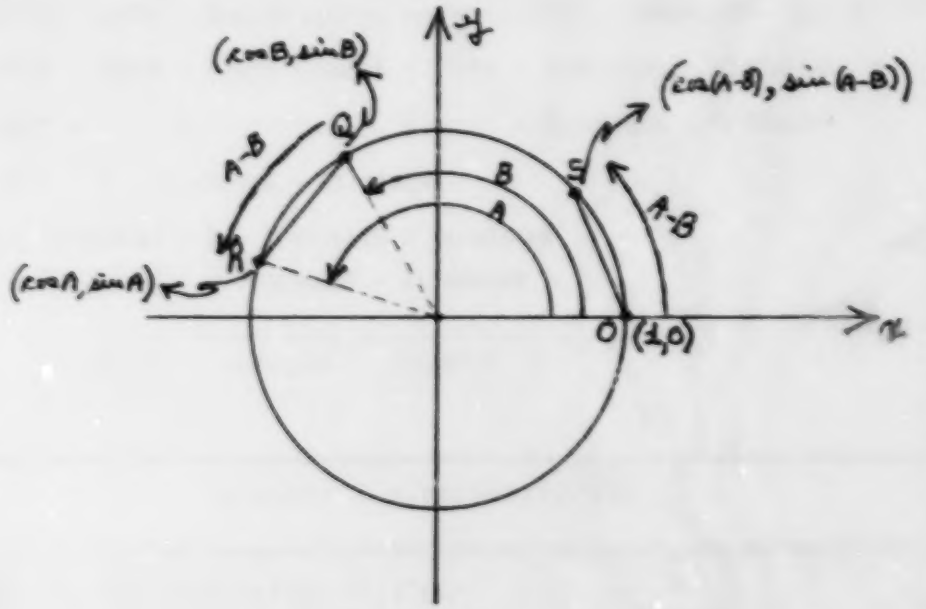
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	l) $\frac{\csc\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = \cos\theta$ m) $\frac{1 + \csc\theta}{\sec\theta} = \cot\theta + \cos\theta$ n) $\frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = \csc\theta + \cot\theta$ o) $\frac{\tan\theta - \cot\theta}{\tan\theta + \cot\theta} = 2\sin^2\theta - 1$ p) $\frac{\sin\theta + \tan\theta}{1 + \sec\theta} = \sin\theta$ q) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \cdot \sin^2\theta$ r) $\frac{\cot^2\theta - 1}{1 + \cot^2\theta} = 2\cos^2\theta - 1$ s) $(\sec\theta + \csc\theta)(\sin\theta + \cos\theta) = \sec\theta \cdot \csc\theta + 2$ t) $(\cos\theta - \sin\theta)(\csc\theta - \sec\theta) = \sec\theta \cdot \csc\theta + 2$ u) etc.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 5: FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES D'UNE SOMME OU D'UNE DIFFÉRENCE DE DEUX RÉELS

Cette activité est difficile, surtout si l'on désire effectuer la démonstration de chacun des fonctions. Cependant, une telle démonstration peut s'avérer fort utile et fort efficace à long terme.

(1) $\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$



Les arcs OS et QR sont congrus et les cordes OS et QR sont congrues

P(0) = (1,0)
P(S) = (cos(A-B), sin(A-B))
P(Q) = (cos B, sin B)
P(R) = (cos A, sin A)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

On utilise d'abord la formule de la distance

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

- $(OS)^2 = (\cos(A-B)-1)^2 + (\sin(A-B)-0)^2$

$(OS)^2 = \cos^2(A-B) - 2\cos(A-B) + 1 + \sin^2(A-B)$

$(OS)^2 = \cos^2(A-B) + \sin^2(A-B) + 1 - 2\cos(A-B)$

$(OS)^2 = 1 + 1 - 2\cos(A-B)$

$(OS)^2 = 2 - 2\cos(A-B)$

- $(QR)^2 = (\cos B - \cos A)^2 + (\sin B - \sin A)^2$

$(QR)^2 = \cos^2 B - 2\cos A \cos B + \cos^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B + \sin^2 A$

$(QR)^2 = \cos^2 B + \sin^2 B + \cos^2 A + \sin^2 A - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

$(QR)^2 = 1 + 1 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

$(QR)^2 = 2 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

car $(OS)^2 = (QR)^2$

- $2 - 2\cos(A-B) = 2 - 2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

$-2\cos(A-B) = -2\cos A\cos B - 2\sin A\sin B$

$$\boxed{\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B}$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Exemple 1 : on sait que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On vérifie à l'aide de formule vue précédemment.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exemple 2 : «Quelle est la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$?»

On sait que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

ou $\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

(2) $\boxed{\cos(\frac{\pi}{2} - B) = \sin B}$

Se référer au concept d'angles complémentaires.

$\cos(\frac{\pi}{2} - B) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos B + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin B$

$\cos(\frac{\pi}{2} - B) = 0 \cdot \cos B + 1 \cdot \sin B$

$\cos(\frac{\pi}{2} - B) = \sin B$

(3) $\boxed{\cos(-B) = \cos B}$

$\cos(-B) = \cos(0-B) = \cos 0 \cdot \cos B + \sin 0 \cdot \sin B$

$\cos(-B) = 1 \cdot \cos B + 0 \cdot \sin B$

$\cos(-B) = \cos B$

(4) $\boxed{\sin(\frac{\pi}{2} - B) = \cos B}$

$\sin(\frac{\pi}{2} - B) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - B))$

angles complémentaires

$\sin(\frac{\pi}{2} - B) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + B)$

$\sin(\frac{\pi}{2} - B) = \cos B$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

(5) $\boxed{\sin(-B) = -\sin B}$

$\sin(-B) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-B)\right)$

$\sin(-B) = \cos\left(B - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\sin(-B) = \cos B \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin B \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin(-B) = \cos B \cdot 0 + \sin B \cdot -1$

$\sin(-B) = 0 - \sin B$

$\sin(-B) = -\sin B$

(6) $\boxed{\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B}$

$\cos(A+B) = \cos(A-(-B)) = \cos A \cdot \cos(-B) + \sin A \cdot \sin(-B)$

$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot -\sin B$

$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$

Exemple 1: on sait que $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

sachant que $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$, on

peut prouver que

$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Exemple 2:

«Quelle est la valeur de $\cos\frac{7\pi}{12}$?»

On sait que $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

L'enseignant peut utiliser d'autres exemples, afin de bien fixer cette technique.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

(7) $\boxed{\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}$

$\sin(A+B) = \cos(\frac{\pi}{2} - (A+B))$

$\sin(A+B) = \cos((\frac{\pi}{2} - A) - B)$

$\sin(A+B) = \cos(\frac{\pi}{2} - A) \cdot \cos B + \sin(\frac{\pi}{2} - A) \cdot \sin B$

$\sin(A+B) = \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B$

Exemple 1: on sait que $\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$5\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + 0$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Exemple 2: «Quelle est la valeur de $\sin \frac{7\pi}{12}$?»

$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}$

$\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3}$

$\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

$\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(8)

$$\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$$

$\sin(A-B) = \cos(\frac{\pi}{2} - (A-B))$

$\sin(A-B) = \cos((\frac{\pi}{2} - A) + B)$

$\sin(A-B) = \cos(\frac{\pi}{2} - A) \cdot \cos B - \sin(\frac{\pi}{2} - A) \cdot \sin B$

$\sin(A-B) = \sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

⑨

$$\boxed{\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\frac{\sin A \cdot \cancel{\cos B}}{\cos A \cdot \cancel{\cos B}} + \frac{\cancel{\cos A} \cdot \sin B}{\cancel{\cos A} \cdot \cos B}}{\frac{\cancel{\cos A} \cdot \cancel{\cos B}}{\cancel{\cos A} \cdot \cancel{\cos B}} - \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}$$

on divise chacun des membres par cosA . cosB

$$\tan(A+B) = \frac{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B}}{1 - \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\sin B}{\cos B}}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B}$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

(10)

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\sin A \cdot \cos B - \cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\dfrac{\sin A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} - \dfrac{\cos A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}{\dfrac{\cos A \cdot \cos B}{\cos A \cdot \cos B} + \dfrac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B}}$$

on divise chacun des membres par $\cos A \cdot \cos B$

$$\tan(A-B) = \frac{\dfrac{\sin A}{\cos A} - \dfrac{\sin B}{\cos B}}{1 + \dfrac{\sin A}{\cos A} \cdot \dfrac{\sin B}{\cos B}}$$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B}$$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.14)	PAGE : 28

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant résout les deux problèmes ci-dessous avec les élèves.

(A) Prouve que $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$

$$\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)}$$

$$\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$$

(B) Simplifie $\sin(\pi - \theta)$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\pi \cdot \cos\theta - \cos\pi \cdot \sin\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = 0 \cdot \cos\theta - (-1) \cdot \sin\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = 0 + \sin\theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

(C) Quelle est la valeur de $\sin(\alpha - B)$, si $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos B = \frac{5}{13}$

$\sin(\alpha - B) = \sin\alpha \cdot \cos B - \cos\alpha \cdot \sin B$

$\sin(\alpha - B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} - \cos\alpha \cdot \sin B$

$P(\alpha) \in$ 2e quadrant
$P(B) \in$ 1er quadrant

on sait que:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$(\frac{3}{5})^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$

$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$

$\cos\alpha = \pm \frac{4}{5}$

et

on sait que:

$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$\sin^2 B + (\frac{5}{13})^2 = 1$

$\sin^2 B = 1 - \frac{25}{169}$

$\sin^2 B = \frac{144}{169}$

$\sin B = \pm \frac{12}{13}$

Comme $P(\alpha)$ est dans le 2e quadrant, on a $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

Comme $P(B)$ est dans le 1er quadrant, on a $\sin B = \frac{12}{13}$

$\sin(\alpha - B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} - (-\frac{4}{5}) \cdot \frac{12}{13}$

$\sin(\alpha - B) = \frac{3}{13} + \frac{48}{65}$

$\sin(\alpha - B) = \frac{15}{65} + \frac{48}{65}$

$\sin(\alpha - B) = \frac{63}{65}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Les élèves effectuent les exercices ci-contre. *N'oublie pas de penser aux compléments d'angles*	<u>Exercices et problèmes</u> 1) Trouve la valeur exacte de: a) sin 75° b) sin 15° c) cos 75° d) cos 15° 2) Prouve que: a) $2\sin(A+45°)\cdot\sin(A-45°) = \sin^2 A - \cos^2 A$ b) $2\cos(\frac{\pi}{4}+A)\cdot\cos(\frac{\pi}{4}-A) = \cos^2 A - \sin^2 A$ 3) Trouve la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{12}$, sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ 4) Vrai ou Faux? a) $\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$ b) $\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$ c) $\cos(270° - \theta) = -\cos\theta$ d) $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	5) En utilisant des combinaisons de 2π, π, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{6}$, calcule a) $\cos \frac{5\pi}{4}$ b) $\cos \frac{4\pi}{3}$ c) $\sin \frac{\pi}{12}$ d) $\tan \frac{11\pi}{2}$ e) $\cos \frac{11\pi}{6}$ f) $\tan 3\pi$ g) $\sin \frac{7\pi}{3}$ h) $\sin 3\pi$ i) $\tan \frac{7\pi}{6}$ j) $\cos \frac{7\pi}{4}$ 6) Complète à l'aide du signe + ou - a) sin(-r) = ... sin r b) tan(-r) = ... tan r c) sec(-r) = ... sec r d) cos(-r) = ... cos r e) csc (-r)=.... csc r f) cot (-r) = ... cot r

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	7. Calcule: cos (A+B) et sin (A-B) si: a) sin A = $\frac{3}{5}$ et cos B = $\frac{5}{13}$ A, B, $\in$ ler quadrant b) cos A = $\frac{12}{13}$ et tan B = $-\frac{4}{3}$ et A,B $\in$ 2è quadrant c) sin A = $\frac{8}{17}$ et sin B = $-\frac{1}{2}$ et A $\in$ ler quadrant B $\in$ 3 è quadrant 8. Calcule: tan (A+B) et tan (A-B) si a) sec A = -2 et sin B = $\frac{1}{2}$ et A,B $\in$ 2è quad. b) tan A = -1 et sin B = $\frac{4}{5}$ et A,B $\in$ 2è quad. c) sin A = $-\frac{3}{5}$ et cos B = $\frac{1}{2}$ et A,B $\in$ 4 è quad. 9. etc...

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 6 : FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES DU DOUBLE D'UN RÉEL

① $\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \sin\alpha$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

② $\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

car...
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$ $\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
③ $\boxed{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}$ $\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha}$ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ Les élèves effectuent les exercices ci contre.	Exercices 1) Si $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ Calcule $\cos 2\alpha$ 2) Si $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ Calcule $\sin 2\alpha$ 3) Si $\tan\alpha = -\frac{3}{5}$ et $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ Calcule $\tan 2\alpha$ 4) Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \frac{4}{5}$ Trouve a) $\sin 2x$ b) $\cos 2x$ 5) etc..

SECTION · 2

BLOC 8

OBJECTIFS 2.3.16

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 1: DÉFINITION ET EXEMPLES

L'enseignant définit ce qu'est une équation trigonométrique et donne quelques exemples.

Une équation trigonométrique est une équation qui renferme une expression trigonométrique.

Ainsi, $\cos X + 1 = 0$ et $\sin^2 \theta - 2 \sin \theta - 3 = 0$ sont des équations trigonométriques.

Pour résoudre de telles équations, il suffit de trouver l'ensemble-solution, c'est-à-dire, la ou les valeurs de la variable qui vérifient l'égalité.

Exemple 1:

Trouver l'ensemble-solution de l'équation $2 \sin x - 1 = 0$

1° Isolons sin x: $2 \sin x = 1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

2° Cherchons les valeurs de x qui vérifient l'équation dans la période 2π.

Ce sont: $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5}{6}$

Et l'ensemble-solution: $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

3° Nous trouvons l'ensemble-solution pour l'intervalle demandé. Etant donné qu'il n'y a pas, dans ce problème, de restriction sur le domaine, nous devons trouver toutes les solutions en dehors de la période du sinus.

Ces solutions sont de la forme $x + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$

Ensemble-solution $= \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$

EXEMPLE 2: Soit l'équation suivante:

$\sin^2\theta - 2\sin\theta = 3$ résolvons pour θ

Nous remarquons ici que l'on a une équation quadratique:

$\sin^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$

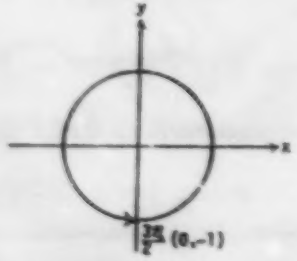
$(\sin\theta - 3)(\sin\theta + 1) = 0$

$\sin\theta - 3 = 0$ ou $\sin\theta + 1 = 0$

$\sin\theta = 3$ ou $\sin\theta = -1$

impossible

car la valeur du sinus se situe dans $[-1, 1]$



La valeur de θ vérifiant l'équation dans la période 2π est $\theta = \frac{3\pi}{2}$

mais comme il y a une infinité de points qui ont un sinus égal à -1, l'ensemble-solution sera: $\left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

EXEMPLE 3: Soit l'équation suivante:

$2 \tan\theta \sin\theta - \tan\theta = 0$ Résolvons pour θ

Fa sons une mise en évidence de $\tan\theta$

$\tan\theta\,(2\sin\theta - 1) = 0$ car $2\boxed{\tan\theta}\sin\theta - \boxed{\tan\theta} = 0$

$\tan\theta = 0$ ou $2\sin\theta - 1 = 0$ d'où,

$\tan\theta = 0$ ou $\sin\theta = \frac{1}{2}$

Pour $\tan\theta = 0$, nous avons $\theta = 0 \vee \theta = \pi$

dans la période π.

$\therefore$ l'ensemble-solution $= \{x\pi\}$ où $x \in \mathbb{Z}$

Sachant que $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\tan\theta = 0$ ssi

$\sin\theta = 0$.

Pour $\sin\theta = \frac{1}{2}$, nous avons $\theta = \frac{\pi}{6} \vee \theta = \frac{5\pi}{6}$ dans la période 2π

l'ensemble-solution $= \left\{\frac{\pi}{6} + 2x\pi\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2x\pi\right\}$ où $x \in \mathbb{Z}$

Ainsi, l'ensemble-solution de l'équation

$2 \tan\theta \sin\theta - \tan\theta = 0$ sera:

$$\{x\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2x\pi\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2x\pi\right\} \text{ où } x \in \mathbb{Z}$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Activité 2 : Applications

L'enseignant fait ensuite résoudre différentes équations.

EXERCICES ET REFERENCES

Décris l'ensemble-solution des équations suivantes ($r \in \mathbb{R}$)
(situe la fonction sur un cercle)

a) $\sin r = 1$
b) $\cos r = 1$
c) $\sin r = 0$
d) $\cos r = 0$
e) $\sin r = -1$
f) $\cos r = -1$

Si $\theta \in \mathbb{R}$, résous les équations suivantes:

a) $\sin \theta = \frac{1}{2}$
b) $\cos \theta = \frac{1}{2}$
c) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\cos \theta \ \frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$
f) $\cos r = -\frac{1}{2}$
g) $\sin r = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
h) $\cos r = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Trouve l'ensemble-solution des équations trigonométriques suivantes:

a) $5 \cos x - 4 = 0$ si $x \in [-2\pi, 2\pi]$
b) $2 \sin \theta = 3$ si $\theta \in \mathbb{R}$
c) $-2 \sin x + \frac{1}{2} = 0$ si $x \in \mathbb{R}$
d) $4 \cos t - 3{,}0852 = 0$ où $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
e) $(\tan \theta + 1)(\cos \theta - 3) = 0$ si $\theta \in \mathbb{R}$
f) $2 \cos^2 x - \sin x = 2$ si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
g) $2 \sin^2 A = 3 \cos A$ si $A \in \mathbb{R}$
h) $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 - 5 \cos \theta$ si $\theta \in [0, 2\pi]$
i) $\tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0$ si $x \in [0, 2\pi]$
j) $\sin r \tan r + 2 \tan r = \sin r + 2$ si $r \in \mathbb{R}$

SECTION 2

ACTIVITÉS D'APPRENTISSAGE

BLOC 9

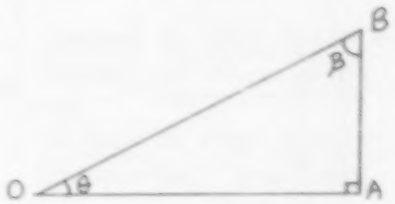
OBJECTIF 2.3.17

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 1: LA FONCTION TRIGONOMÉTRIQUE D'UN ANGLE AIGU DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Après avoir étudié la trigonométrie sous son aspect fonctionnel, nous continuons l'étude mais sous son aspect géométrique, c'est-à-dire que les fonctions trigonométriques sont perçues comme des rapports entre les côtés d'un triangle rectangle.

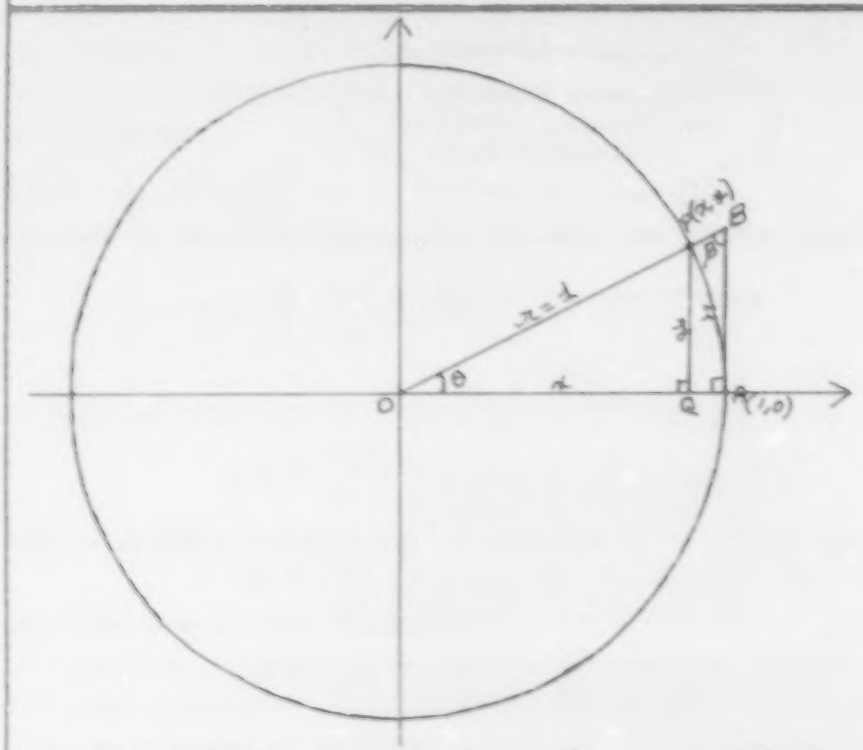
Soit le triangle rectangle OBA, rectangle en A, et l'angle aigu θ.



On trace le cercle trigonométrique qui passe par l'angle droit (∠A).

Cette construction permettra d'obtenir des triangles semblables!

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES



L'élève sait déjà que: $\sin \theta = \sin t = \frac{y}{r}$

r = 1

$\cos \theta = \cos t = \frac{x}{r}$

$\tan \theta = \tan t = \frac{y}{x} = (x \neq 0)$

$\cot \theta = \cot t = \frac{x}{y} = (y \neq 0)$

$\sec \theta = \sec t = \frac{1}{x} = (x \neq 0)$

$\csc \theta = \csc t = \frac{1}{y} = (y \neq 0)$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Les triangles OPQ et OBA étant semblables, on peut alors définir les rapports trigonométriques sans faire référence à aucun système de coordonnées.

deux triangles rectangles sont semblables, s'ils ont un angle aigu congru.

Ainsi: $\frac{OQ}{OA} = \frac{OP}{OB} = \frac{PQ}{BA}$

$\frac{PQ}{OP} = \frac{BA}{OB}$ et $\frac{OQ}{OP} = \frac{OA}{OB}$, etc.

On peut alors en tirer les 6 fonctions trigonométriques.

$$\sin \theta = \frac{BA}{OB} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \theta}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\cos \theta = \frac{OA}{OB} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \theta}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\tan \theta = \frac{BA}{OA} = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \theta}{\text{longueur du côté adjacent à } \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{OA}{BA} = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \theta}{\text{longueur du côté opposé à } \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{OB}{OA} = \frac{\text{longueur de l'hypoténuse}}{\text{longueur du côté adjacent à } \theta}$$

$$\text{scs } \theta = \frac{OB}{BA} = \frac{\text{longueur de l'hypoténuse}}{\text{longueur du côté opposé à } \theta}$$

Comme θ est un angle aigu du triangle rectangle, les valeurs des six fonctions trigonométriques du triangle rectangle, sont positives.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Donc: pour un angle $0° < \theta < 90°$, on a toujours

$\sin \theta < 1$ et $\csc \theta > 1$

$\cos \theta < 1$ $\quad \sec \theta > 1$

pour tan θ et cot θ, toutes les valeurs sont possibles.

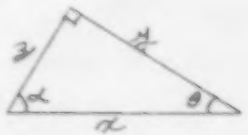
EXERCICES ET REFERENCES

Si l'angle aigu devient égal à 90°, le triangle n'existe plus,....

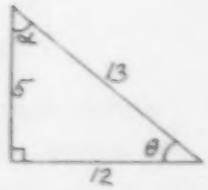
EXERCICES

1) Dans chacun des cas suivants, trouve la valeur du sinus, du cosinus et de la tangente des angles θ et ∝.

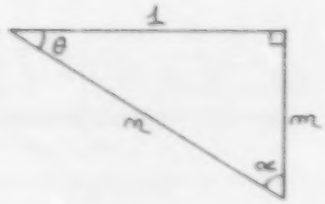
a)



b)



c)

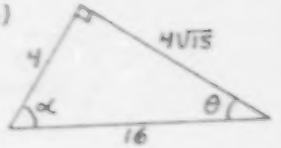


ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

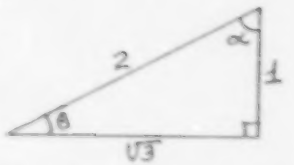
2) Dans chacun des cas suivants, trouve la valeur de la sécante, de la cosécante et de la cotangente des angles θ et α.

a)

b)



c)



3) Une planche de 260cm de longueur repose contre un mur à 240cm du sol. Quelle est la valeur de la tangente formée par la planche et le sol?

4) ABCD est un carré. On joint C au point E qui est le milieu de AD. Trouve tous les rapports trigonométriques de l'angle ECD.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 2: LA VALEUR DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES A L'AIDE DES TABLES

Valeur des fonctions trigonométriques d'un angle A où $0° < A < 90°$

En annexe, on retrouve une table trigonométrique. Cette table donne le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente des angles de 0° à 90°.

Cf: annexes 1 à 4

Pour les sinus (tangentes), les degrés apparaissent en première colonne et pour les cosinus(cotangentes), en dernière colonne. On lit les sinus (tangentes) de haut en bas et les cosinus (cotangentes) de bas en haut.

N.B.: «Le sinus d'un angle est égal au cosinus de son complément.»

$$\sin 56° = \cos(90°-56°) = \cos 34°$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$0{,}8290 \qquad\qquad 0{,}8290$$

Faire vérifier cet énoncé par les élèves dans les tables.

«La tangente d'un angle est égale à la cotangente de son complément.»

$$\tan 56° = \cot(90°-56°) = \cot 34°$$
$$\downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$1{,}483 \qquad\qquad 1{,}483$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Question 1: «Quelle est la valeur de sin 27°?»

En decendant la première colonne jusqu'au palier 27°, on lit immédiatement, dans la colonne avec en-tête, 0,0 le nombre 0,4540; c'est la valeur de sin 27°.

Question 2: «Quelle est la valeur de cos 34°?»

On remonte la dernière colonne jusqu'au palier 34° et on lit immédiatement, dans la colonne sous-titrée 0,0 le nombre 0,8290; c'est la valeur de cos 34°.

N.B. (1) : Pour la tangente et la cotangente, on procède comme ci-dessus.

$\tan 32° = 0,6249$

$\cot 23° = 2,356$

N.B. (2) : Pour trouver la sécante et la cosécante, on se sert des identités connues.

$$\sec 32° = \frac{1}{\cos 32°} = \frac{1}{0,8420} \approx 1,188$$

$$\csc 23° = \frac{1}{\sin 23°} = \frac{1}{0,3907} \approx 2,559$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
Si les degrés sont accompagnés de minutes ou de secondes, il est nécessaire de les exprimer en notations décimales. $15^{\circ}\ 30' = 15\ \frac{30}{60}$ ou $15{,}5^{\circ}$ $(30 \div 60 = 0{,}5)$ $46^{\circ}\ 18' = 46\ \frac{18}{60}$ ou $46{,}3^{\circ}$ $(18 \div 60 = 0{,}3)$ EXEMPLE 1: Soit à trouver $\sin 46^{\circ}\ 18'$ Sachant que $46^{\circ}\ 18' = 46\ \frac{18}{60} = 46{,}3^{\circ}$ on a, $\sin 46^{\circ}\ 18' = \sin 46{,}3^{\circ} = 0{,}7230$ (lire dans la colonne avec en-tête 0,3) EXEMPLE 2: Soit à trouver $\cos 34^{\circ}\ 54'$ Sachant que $34^{\circ}\ 28' = 34\ \frac{54}{60} = 34{,}9^{\circ}$ on a, $\cos 34^{\circ}\ 54' \simeq \cos 34{,}9^{\circ} = 0{,}8202$ (lire dans la colonne sous-titrée 0,9)	

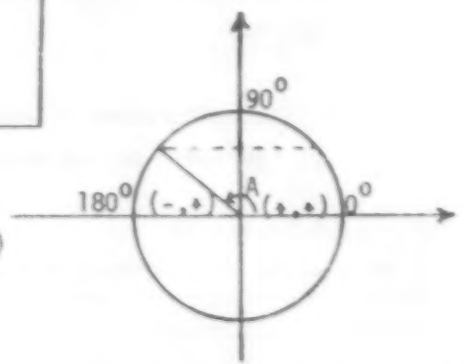
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Valeur des fonctions trigonométriques d'un angle A où $90° < A < 180°$

La table que l'on retrouve en annexe, donne la valeur des fonctions trigonométriques dont les angles varient de 0° à 90°; d'où la nécessité de ramener au premier quadrant les fonctions de tout angle obtus et d'appliquer les identités vues précédemment.

$\sin (180^0 - A) = \sin A$
$\cos (180^0 - A) = - \cos A$
$\tan (180^0 - A) = - \tan A$

Symétrie par rapport à l'axe des v.



EXEMPLE 1: Soit à évaluer $\sin 135^0$

$\sin 135^0 = \sin (180^0 - 135^0) = \sin 45^0$

$= 0,7071$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

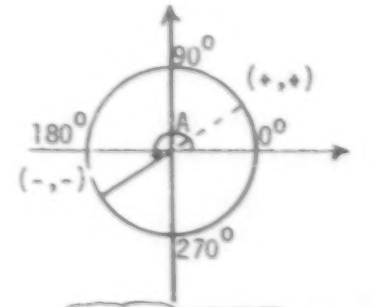
EXEMPLE 2: Soit à évaluer cos 112°

$\cos 112° = \cos (180° - 112°) = - \cos 68°$

$= - 0{,}3746$

Valeur des fonctions trigonométriques d'un angle A où $180° < A < 270°$

Pour ramener ces angles dans le ler quadrant, il faut appliquer les identités suivantes:



Symétrie par rapport à l'origine (0,0)

$\sin (A - 180^0) = - \sin A$

$\cos (A - 180^0) = - \cos A$

$\tan (A - 180^0) = \tan A$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

EXEMPLE 1: Soit à évaluer $\tan 235^0$

$\tan 235^0 = \tan (235^0 - 180^0) = \tan 55^0 = 1,428$

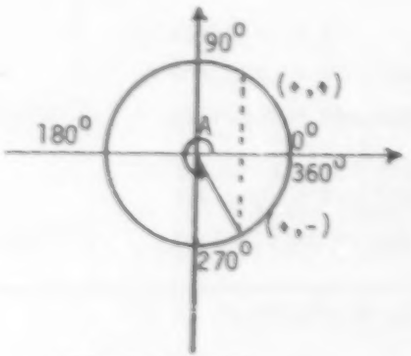
EXEMPLE 2: Soit à évaluer $\cos 235^0$

$\cos 235^0 = \cos (235^0 - 180^0) = - \cos 55^0$

$= - 0,5736$

Valeur des fonctions trigonométriques d'un angle A où $270° < A < 360°$

Pour ramener ces angles dans le 1er quadrant, il faut appliquer les identités suivantes:



Symétrie par rapport à l'axe des x

$\sin (360^0 - A) = -\sin A$

$\cos (360^0 - A) = \cos A$

$\tan (360^0 - A) = -\tan A$

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

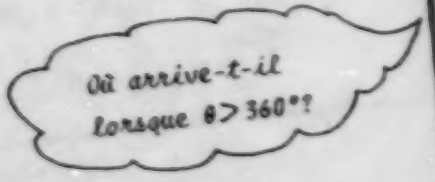
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXEMPLE 1: Soit à évaluer sin 286°

sin 286° = sin (360° - 286°) = - sin 74° = - 0,9613

EXEMPLE 2: Soit à évaluer cos 286°

cos 286° = cos (360° - 286°) = cos 74° = 0,2756



EXERCICES ET REFERENCES

EXERCICES

1) Trouve la valeur de:

a) sin 60°

b) cos 28°

c) tan 75°

d) sin 43° 20'

e) tan 58° 40'

f) cos 18° 30'

g) cos 74° 10'

h) cot 25° 40'

i) sec 37°

j) csc 87°

2) Complète:

a) sin 300° = _____

b) cos 158° = _____

c) cos 649° = _____

d) tan 349° = _____

e) tan 960° = _____

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

NOTE:

Dans tous les cas que l'on vient de mentionner, nous pouvons, en utilisant la table retrouver l'angle correspondant à la valeur d'une fonction donnée.

EXEMPLE: A quel angle aigu correspond sin A = $\frac{3}{4}$

soit sin A = 0,75

Dans la table des valeurs du sinus, nous cherchons la valeur la plus approchée de 0,75. Nous retrouvons 0,7501.

∠A	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
48°	←	←	←	←	←	←	0,7501	

D'où ∠A = 48,6°

EXEMPLE: A quel angle correspond cos A = - 0,2756

On trouve dans la table cos 74° = 0,2756. La valeur de cos A étant négative, A est dans le 2ème quadrant, d'où cos (180° - 74°) = cos 106° = 0,2756

Donc, la mesure de A est de 106°

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

EXERCICES

1) Evalue la mesure en degrés de l'angle si:

a) $\sin \alpha = 0,5995$

b) $\tan \alpha = 4,989$

c) $\sin \alpha = 0,65$

d) $\sin \alpha = 0,7263$

e) $\cos \alpha = 0,6648$

f) $\tan \alpha = 1,246$

g) $\cos \alpha = 0,8017$

h) $\tan \alpha = 0,4598$

2) Complète:

a) cos _____ = 0,72

b) sin _____ = 0,35

c) cos _____ = -0,7

d) cos _____ = -0,2756

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 3: LA VALEUR DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES À L'AIDE DE LA CALCULATRICE

L'enseignant fait rapidement comprendre aux élèves que l'évaluation des fonctions trigonométriques est beaucoup plus rapide et beaucoup plus précise à l'aide d'une calculatrice.

Les élèves utilisent leur calculatrice pour calculer les valeurs déjà calculées précédemment et ils comparent les deux résultats:

	Sans calculatrice	Avec calculatrice
Sin 56°	0.8290	0,8290375
Tan 56°	1,483	1,4825609
Tan 32°	0,6249	0,6248693
Cot 23°	2,356	2,3558523
Sec 32°	1,188	1,1791784
Csc 23°	2,559	2,5593046
Sin 46°18'	0,7230	0,7229671
Cos 34°54'	0,8202	0,8201518
Sin 135°	0,7071	0,7071067
Cos 112°	- 0,3746	- 0,3746066
Tan 235°	1,428	1,4281480
Cos 235°	- 0,5736	- 0,5735764
Sin 286°	- 0,9613	- 0,9612617
Cos 286°	0,2756	0,2756374

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

L'enseignant insiste sur les différentes techniques à utiliser:

A) Pour sin 56° → se mettre en mode [DEG]

et

56 SIN

Pour sin 248° → se mettre en mode [DEG]

et

248 SIN

Cette technique est valable pour les fonctions sinus, cosinus et tangente

B) Pour cot 23° → se mettre en mode [DEG]

et

1 [÷] [(] 23 [TAN] [)] [=]

Expliquer ce genre de séquence

Pour csc 23° → se mettre en mode [DEG]

et

[−] [(] 23 [SIN] [)] [=]

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	EXERCICES 1) Trouve la valeur de: a) sin 60° f) cos 18° 30' b) cos 28° g) cos 74° 10' c) tan 75° h) cot 25° 40' d) sin 43° 20' i) sec 37° e) tan 58° 40' j) csc 87° 2) Complète: a) sin 300° = _____ b) cos 158° = _____ c) cos 649° = _____ d) tan 349° = _____ e) tan 960° = _____

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 4: LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES RECTANGLES

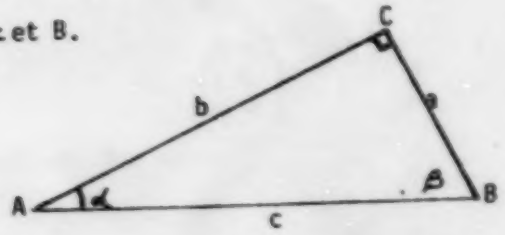
La résolution d'un triangle rectangle consiste à trouver la valeur de ses angles et de ses côtés.

Premier cas:
on connaît deux côtés quelconques

Ex: on connaît $< C = 90°$ (le triangle est rectangle)

$b = 40$ et $a = 30$

Il faut chercher c, α et B.



$c = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ (par la relation de Pythagore)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Comme on connaît les côtés a et b du triangle, on peut se servir de la tangente de l'union de l'autre angle.

$$\text{Tan } \alpha = \frac{\text{côté opposé à } \alpha}{\text{côté adjacent à } \alpha} = \frac{a}{b} = \frac{30}{40} = 0{,}75$$

Tan α = 0,75

Dans la table, on trouve tan 36,9° = 0,75

Sur la calculatrice, on peut faire 0,75 [INV] [TAN]

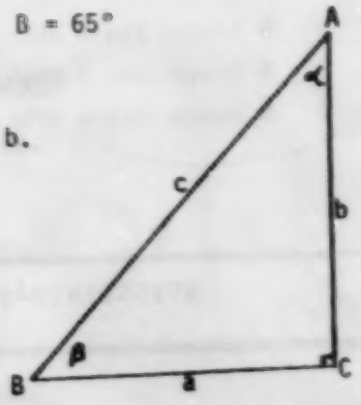
Ainsi: α = 36,9° et B = 53,1°

Deuxième cas:
On connaît un côté et un angle aigu.

Ex: on connaît c = 100 et B = 65°

ainsi α = 25°

Il faut chercher a et b.



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

$\text{Sin } B = \frac{b}{c}$ et $\text{Sin } 65° = \frac{b}{100}$

$b = 100 \times \sin 65°$

$b = 100 \times 0{,}9063078$

$b \simeq 90{,}63$

$\text{Cos } B = \frac{a}{c}$ et $\text{Cos } 65° = \frac{a}{100}$

$a = 100 \times \cos 65°$

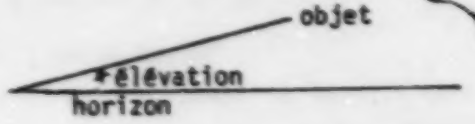
$a = 100 \times 0{,}4226183$

$a \simeq 42{,}26$

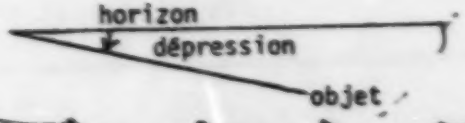
On aurait pu trouver le 3e côté par le théorème de Pythagore. Cependant, ce procédé est plus long et souvent moins précis.

Petite note utile:

angle d'élévation



angle de dépression



EXERCICES ET REFERENCES

On peut vérifier:

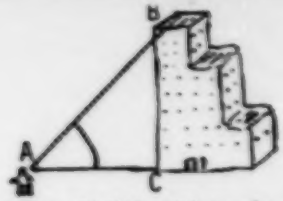
$c^2 = a^2 + b^2$

$100^2 = 90{,}63^2 + 42{,}26^2$

$100^2 = 8214 + 1786$

$10000 = 10000$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE



Angle d'élévation de B

Angle de dépression de A

Soit un observateur dont l'oeil placé en A, regarde un objet placé en B. L'angle formé par le rayon visuel et l'horizontale est appelé angle d'élévation de B.

Si le même observateur, dont l'oeil placé en B, regarde un objet situé au-dessous de lui en A, l'angle formé par le rayon visuel et l'horizontale est appelé angle de dépression de A.

Dans ces triangles rectangles,

- *le côté a est opposé à* A
- *le côté b est opposé à* B
- *le côté c est opposé à* C

EXERCICES ET REFERENCES

EXERCICES

1) Résous les triangles rectangles suivants:

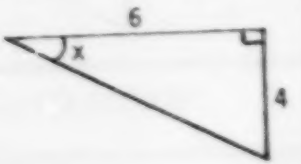
a) $\angle A = 58°$ $\angle C = 90°$ et $b = 34$

b) $\angle A = 48°$ $\angle C = 90°$ et $a = 7$

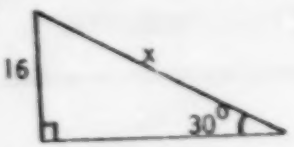
c) $\angle A = 90°$ $\angle a = 15$ et $b = 9$

2) Dans chacun des cas suivants, trouve la valeur de x:

b)



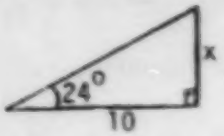
a)



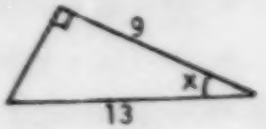
OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)	PAGE: 22

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

c)

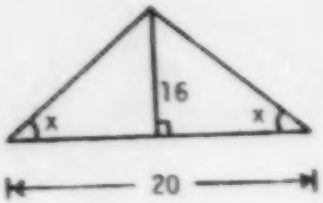


d)

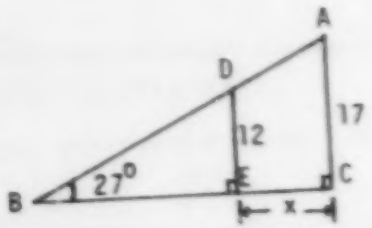


e)

f)



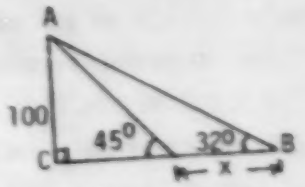
g)



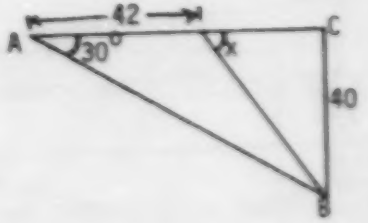
OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

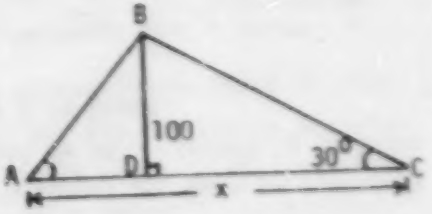
h)



i)



j)

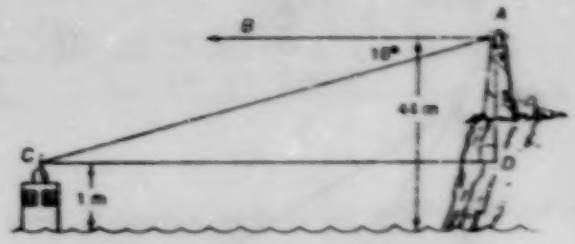


OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)	PAGE: 24

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

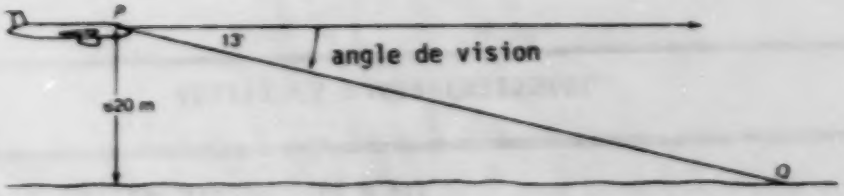
PROBLÈMES

1) Dans la figure ci-dessous, l'angle de dépression du sommet du phare au sommet de la bouée est de 16°. Trouve la distance DC, du cap à la bouée.



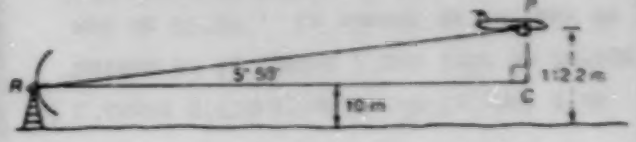
2) Dans la même figure, trouve la distance, AC, du sommet du phare au sommet de la bouée.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE



EXERCICES ET REFERENCES

3) L'angle d'élévation de l'antenne radar à un avion est de 5°50'. L'antenne est à 10 mètres au-dessus du sol. L'altitude de l'avion est de 112,2 m. Trouve la distance, RP, de l'antenne à l'avion.

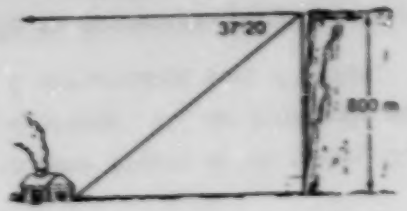


4) Dans la même figure qu'au numéro 3, trouve la distance, RC, de l'antenne au point C directement sous l'avion.

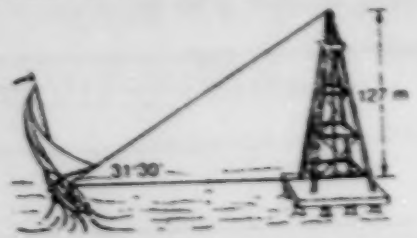
5) L'angle de dépression du point le plus près au sol qui est visible du nez d'un avion est appelé angle de vision. Pour un certain avion volant à une altitude de 620 m, l'angle de vision est de 13°. Trouve la distance entre le pilote et le point visible le plus près au sol. Réfère-toi à la figure au début de la page suivante.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

6) L'angle de dépression du sommet d'un cap de 800 m de hauteur à la base d'un chalet est de 37°20'. A quelle distance du cap se trouve le chalet?

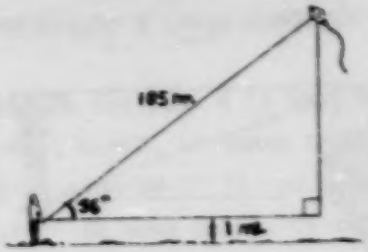


7) L'angle d'élévation entre le pont d'un bateau et le sommet d'une tour de forage est de 31°30'. Le sommet de la tour de forage est à 127 m au-dessus du niveau de la mer. En assumant que la lecture de l'angle d'élévation est prise au niveau de la mer, trouve la distance entre la base de la tour de forage et le bateau.

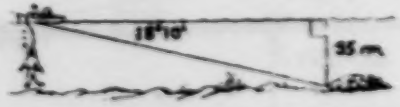


ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

8) La corde d'un cerf-volant est longue de 185 m et forme avec l'horizontale, comme illustré, un angle de 36°. Quelle est l'altitude du cerf-volant? (Suppose que la corde est droite et qu'elle est retenue à un mètre au-dessus du sol).

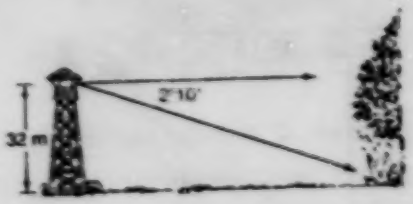


9) Un bateau utilisant le «SONAR» trouve une épave sous un angle de dépression de 13°10'. Le relevé océanographique indique que l'épave est à 35 m sous le niveau de la mer. Quelle distance un homme-grenouille doit-il «marcher» pour se rendre à l'épave s'il est descendu sous le bateau?



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

10) Du sommet d'une tour, un garde forestier voit un feu sous un angle de dépression de 2° 10'. Si le sommet de la tour d'où fut prise la lecture est à 32 m du sol trouve la distance entre le pied de la tour et le feu.

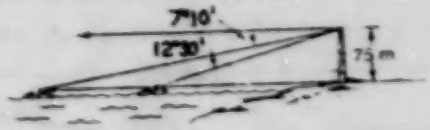


11) La tour Eiffel à Paris projette une ombre de 150 m de longueur quand l'angle d'élévation avec le soleil est de 63° 26'. Trouve la hauteur de la tour.

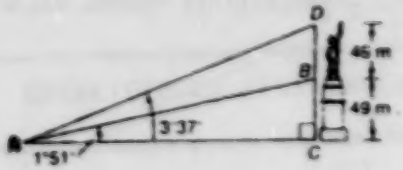
OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)	PAGE: 29

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

12) Du haut d'une tour de 75 m nous observons deux bateaux sur un lac. Les angles de dépression sont 12° 30' et 7° 10' Quelle est la distance entre les deux bateaux?



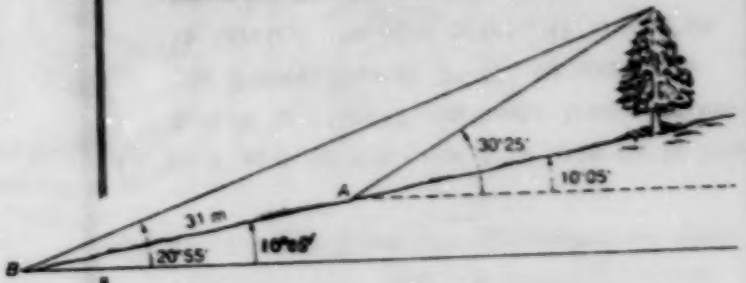
13) Du niveau de ses yeux à la base de la Statue de la Liberté, un homme trouve un angle d'élévation de 3° 37' au sommet de la torche. Du même point, il trouve un angle de 1° 51' au pied de la statue. La distance entre le sommet de la torche et le pied de la statue est de 46 m et la hauteur de la base de la statue seulement est de 49 m. Trouve la distance entre l'homme et la base de la statue, AC.



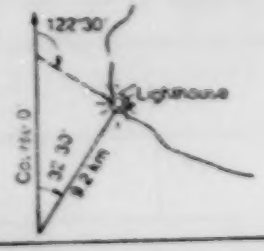
OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

14) Un arbre pousse verticalement sur une colline qui a un angle d'inclinaison de 10° 05'. Des points A et B distants de 31 m l'un de l'autre, on trouve des angles d'élévation de 30° 25' en A et de 20° 55' en B avec le sommet de l'arbre. Trouve la hauteur de l'arbre.

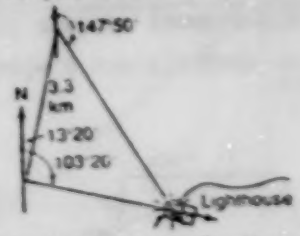


15) La position d'un phare situé à 9,2km d'un bateau est de 32° 30'. Quelle distance un bateau doit-il naviguer sur une course de 0° pour que la position du phare soit 122° 30'.

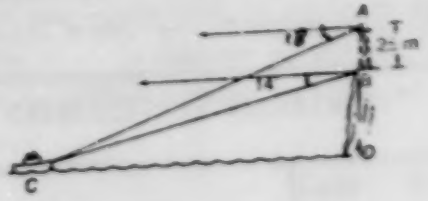


ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

16) La position du phare prise par le navigateur sur un bateau est de 103° 20'. Après que le bateau ait parcouru 3,3 km sur une course de 13° 20', le navigateur trouve la position du phare à 147° 50'. Trouve la distance entre le bateau et le phare lors de la première lecture.



17) Une tour de 25 mètres de hauteur se situe au sommet d'un cap. La ligne de vision d'un bateau au point C vers A et B fait des angles de 18° et 14° respectivement, avec l'horizontale. Trouve BD, la hauteur du cap.

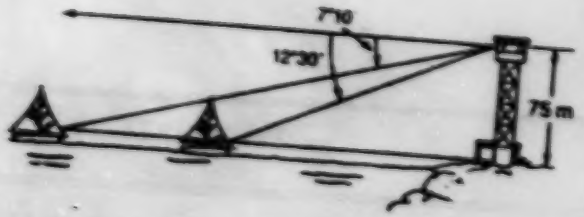


OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	PAGE: 32 EXERCICES ET REFERENCES

18) A partir d'une photographie de la lune, un scientifique estime la longueur de l'ombrage d'un côté d'un cratère à 424 m. Le soleil produisait un angle de 24,4° quand la photographie a été prise. Quelle est la hauteur du côté du cratère?

19) Un avion vole à une altitude de 5 km. Le pilote veut amorcer sa descente vers l'aéroport en ayant un angle d'inclinaison de 4° avec le sol. A quelle distance terrestre le pilote va-t-il amorcer sa descente?

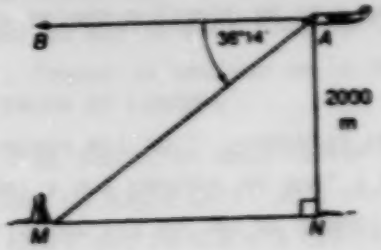


20) Deux bateaux sont observés du haut d'une tour de 75 m. Les angles de dépression sont de 12° 30' et 7° 10'. Quelle distance au mètre près, sépare les deux bateaux?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)	PAGE : 33

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

21) Un aviateur observe une borne terrestre sous un angle de dépression de 36°14'. L'avion est à 2000 m au-dessus du sol. A quelle distance de la borne se trouve un point au sol situé directement sous l'avion?



22) L'angle d'élévation du sommet d'une cheminée est 30°. La distance entre le point d'observation et la base de la cheminée est 300 m. Trouve sa hauteur.

23) Du sommet du mât principal d'un bateau, on observe une bouée sous un angle de dépression de 30°. La hauteur du mât est 54 m. trouve la distance entre la bouée et le bateau.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	24) Dans une mine, une veine de charbon a une inclinaison de 23° avec l'horizontale. Un homme, en suivant cette veine, parcourt une distance de 500 m au-dessous du niveau du sol. A quelle distance se trouve l'homme au niveau du sol. 25) Du pied d'un poteau l'angle d'élévation d'un clocher est 45° et du sommet du poteau qui a une hauteur de 10m, l'angle d'élévation est 30°. Trouve la hauteur et la distance du clocher. 26) De deux points distants de 50 m on voit un clocher sous les angles d'élévation de 45° et de 21° 48'. Ces points sont à l'est du clocher. Trouve la hauteur du clocher. 27) L'angle d'élévation du sommet d'une tour est 27°12'. Si l'on s'approche de 100m de la tour, l'angle d'élévation est de 54° 24'. Trouve la hauteur de la tour.

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)	PAGE: 35

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	28) Du haut d'un édifice de 90 m de hauteur, l'angle de dépression d'une automobile est 49° 10'. A quelle distance du pied de l'édifice se trouve cette automobile? 29) Du sommet d'une tour, l'angle de dépression d'un objet situé à 50 m de la base de cette tour et sur le même plan horizontal, est 15° . Trouve la hauteur de la tour. 30) Du haut d'un phare, un observateur voit un bateau sous un angle de 4° 30'; si la hauteur du phare est de 116 m à quelle distance de la base du phare se trouve le bateau? 31) L'angle d'élévation du sommet d'un édifice est 50° et l'observateur se trouve à 140 m de la base de l'édifice. Quelle est la hauteur de cet édifice? 32) Si une tour de 150 m de hauteur projette une ombre de 87,5 m, quel est l'angle d'élévation du soleil à ce moment?

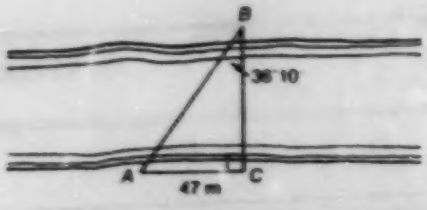
OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

33) Si l'angle d'élévation du soleil est de 60° et que l'ombre d'un arbre mesure 10 m, quelle est la hauteur de l'arbre?

34) Un homme de 1,55 m regarde un OVNI immobilisé dans le ciel; l'angle que fait son rayon visuel avec l'horizontale est de 65°. Si cet homme mesurait 1,85 m l'angle ne serait que 64°. A quelle altitude se trouve l'OVNI?

35) Une personne mesurant 2 m est debout en face d'un édifice. L'angle d'élévation est de 75°. Quelle est la hauteur de cet édifice?

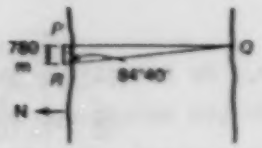


36) Quelle est la largeur de cette rivière?

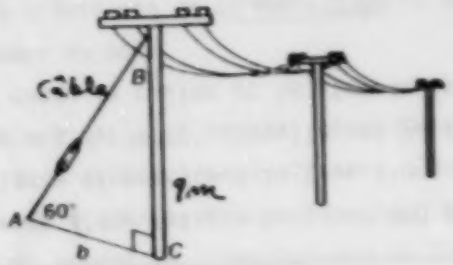
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

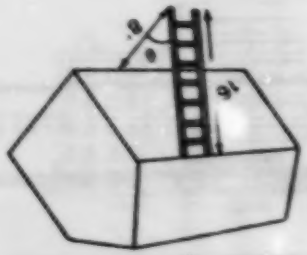
EXERCICES ET REFERENCES

37) Les points P et Q sont situés de chaque côtés du grand Canyon (USA). Le point R est situé à 780 m du point P et la mesure de l'angle PRQ est de 84°40'. Quelle est la largeur du Canyon?



38) Un câble d'acier est attaché à un poteau et ce câble forme un angle de 60° avec le sol. Trouve la distance entre le câble et le poteau (AC) et la longueur du câble d'acier.





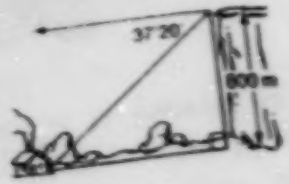
39) Une échelle de 5 m est placée contre une maison de façon que le pied de l'échelle soit situé à 2,5 m de la maison. Quelle est la valeur de l'angle 0?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

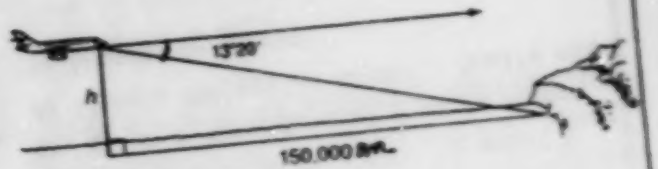
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

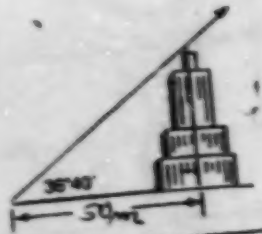
EXERCICES ET REFERENCES

40) Du sommet d'une falaise haute de 800 m l'angle de dépression à la base d'une cabine est de 37°20'. Quelle est la distance entre la cabine et le pied de la falaise?



41) Un avion volant au-dessus de l'océan Atlantique, est à 150,000 m du rivage. L'angle de dépression est de 13°20'. Quelle est l'altitude de l'avion?

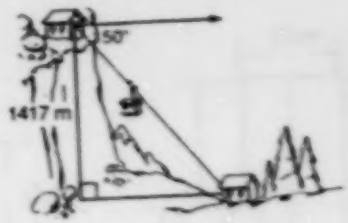




42) Un édifice projette une ombre de 50 m L'angle d'élévation à l'extrémité de l'ombre est de 36°40'. Quelle est la hauteur de cet édifice?

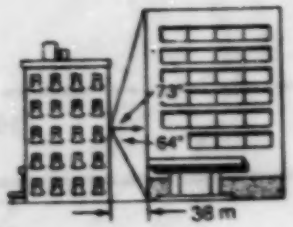
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

43) Deux chalets de montagne sont reliés par un téléphérique. L'angle de dépression du câble est de 50°. La distance verticale entre les deux chalets est de 1417 m. Quelle est la longueur du câble?



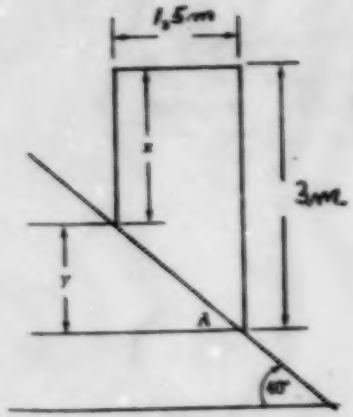
44) Un mât projette une ombre de 18,2 m. A l'extrémité de l'ombre, l'angle d'élévation du soleil est de 22°40'. Quelle est la hauteur du mât?

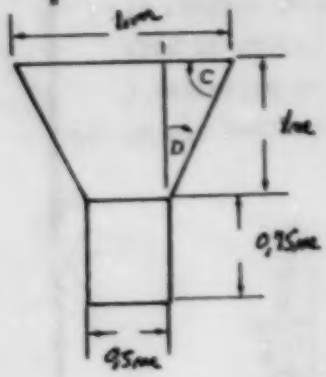
45) L'édifice Birks et l'hôpital Jésus-Marie sont situés à 38 m l'un de l'autre. D'une fenêtre de l'édifice Birks, l'angle d'élévation du sommet de l'hôpital est de 73°. De la même fenêtre, l'angle de dépression du pied de l'hôpital est de 64°. Quelle est la hauteur de l'hôpital?

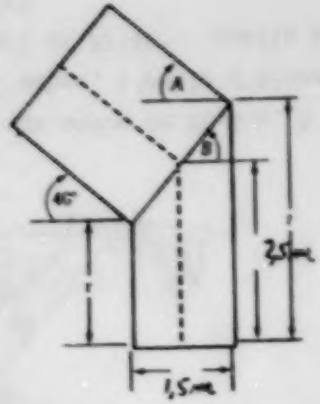


ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

46) Trouve les mesures inconnues dans chacun des cas.







ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 5: LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES

L'enseignant pose la question suivante:

«Qu'arrive-t-il lorsque le triangle n'est pas rectangle?»

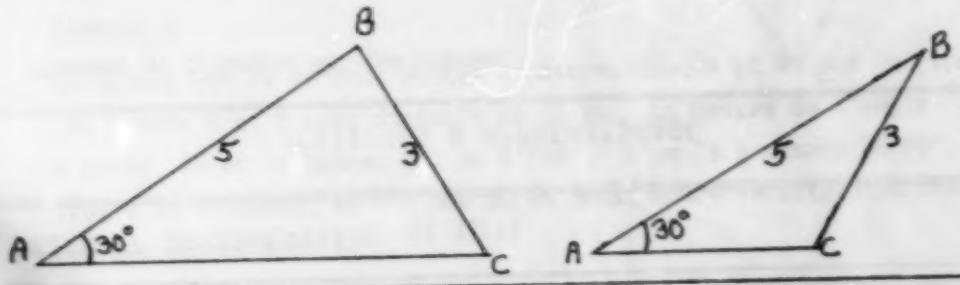
exemple:

Il faut trouver d'autres relations.

Supposons que l'on connaisse
DEUX CÔTÉS ET UN ANGLE OPPOSÉ À L'UN DE CES CÔTÉS

Exemple: Soit un triangle ABC, dans lequel A=30°, c=5 et a=3

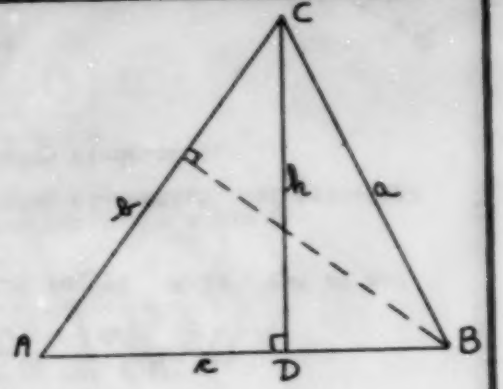
On peut construire les deux triangles ci-dessous, qui satisfont tous les deux aux conditions énonçées ci-dessous.



Ces deux solutions seront énoncées plus tard par la Loi du Sinus

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

. Prenons un triangle ABC quelconque.



On sait que:

$\sin A = \frac{h}{b}$ (dans le $\triangle$ ACD)

$\sin B = \frac{h}{a}$ (dans le $\triangle$ BCD)

On en déduit que: $h = \text{Sin } A \cdot b$

$h = \text{Sin } B \cdot a$

et que: $b \cdot \text{Sin } A = a \cdot \text{Sin } B$

On divise ensuite chaque membre par Sin A • Sin B:

$$\frac{b \cdot \cancel{\text{Sin A}}}{\cancel{\text{Sin A}} \cdot \text{Sin B}} = \frac{a \cdot \cancel{\text{Sin B}}}{\text{Sin A} \cdot \cancel{\text{Sin B}}}$$

On obtient alors: $\frac{b}{\text{SinB}} = \frac{a}{\text{SinA}}$ (1)

. Choisissons une autre hauteur dans le triangle ABC, soit BM.

On sait que:

$\sin C = \frac{h}{a}$ (dans le $\triangle$ BCM)

$\sin A = \frac{h}{c}$ (dans le $\triangle$ BAM)

EXERCICES ET REFERENCES

Une idée lumineuse des Pythagoriciens!

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

On en déduit que: $h = \text{Sin } C \cdot a$

$h = \text{Sin } A \cdot c$

et que: $a \cdot \text{Sin } C = c \cdot \text{Sin } A$

On divise ensuite chaque membre par Sin A • Sin C:

$$\frac{a \cdot \cancel{\text{Sin C}}}{\text{Sin A} \cdot \cancel{\text{Sin C}}} = \frac{c \cdot \cancel{\text{Sin A}}}{\cancel{\text{Sin A}} \cdot \text{Sin C}}$$

On obtient alors: $\frac{a}{\text{Sin A}} = \frac{c}{\text{Sin C}}$ (2)

. Si on relie (1) et (2), on obtient:

$$\frac{a}{\text{Sin A}} = \frac{b}{\text{Sin B}} = \frac{c}{\text{Sin C}}$$

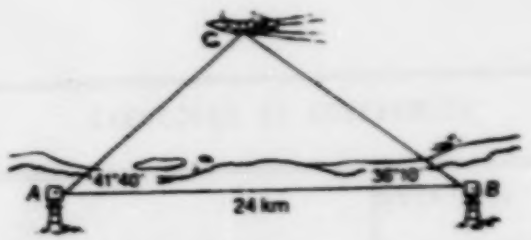
c'est la loi du Sinus

Les côtés d'un triangle quelconque sont proportionnels aux sinus des angles opposés à ces côtés.

Cette loi s'applique également lorsque l'on connaît un côté et deux angles.

Exemple 1

Un bateau est vu de deux postes d'observation, A et B, sur la rive. Les points A et B sont distants de 24 km. La mesure de l'angle A entre $\overline{AB}$ et le bateau est de 41°40'. L'angle B mesure 36°10'. Trouve la distance, au dixième de km près, entre le bateau et chacun des postes A et B.



OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Avant de résoudre ce problème, il faut regarder si on ne peut pas trouver d'autres données par déduction

Ici, $\angle c = 180° - \angle A - \angle B$

$\angle c = 180° - 41°40' - 36°30'$

$\angle c = 101°50'$

L'enseignant demande aux élèves comment on peut appliquer ici la Loi du sinus.(Echanges et discussions).

L'élève devrait constater que la loi du sinus s'applique à une seule égalité à la fois.

$$\frac{BC}{\text{Sin } A} = \frac{BA}{\text{Sin } C}$$

$$\frac{BC}{\text{Sin } 41°40'} = \frac{24 \text{ km}}{\text{Sin } 101°50'}$$

et

$$\frac{BC}{\text{Sin } 41{,}666°} \quad \frac{24 \text{ km}}{\text{Sin } 101{,}833°}$$

Il faut transformer des degrés minutes en degrés

et

$$\frac{BC}{0{,}6647959} = \frac{24 \text{ km}}{0{,}9787483}$$

et

$$BC = \frac{24 \times 0{,}6647959}{0{,}9787483}$$

$BC \simeq 16{,}3$ km

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

$$\frac{CA}{\sin B} = \frac{BA}{\sin C}$$

$$\frac{CA}{\sin 36°10'} = \frac{24km}{\sin 101°50'}$$

et

$$\frac{CA}{\sin 36{,}166°..} = \frac{24km}{\sin 101{,}833°..}$$

et

$$\frac{CA}{0{,}5901361} = \frac{24km}{0{,}9787483}$$

et

$$CA = \frac{24 \times 0{,}5901361}{0{,}9787483}$$

$$CA \leq 14{,}5 \text{ km}$$

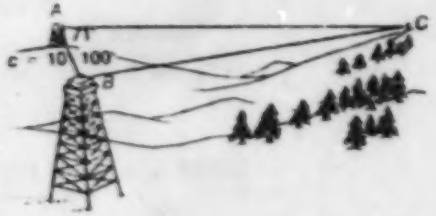
Réponse: Le bateau est à 16,3 km du poste d'observation B et à 14,5 km du poste d'observation A.

L'enseignant apporte les précisions voulues sur la façon de fournir la réponse.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

EXEMPLE 2

Deux stations de gardes-forestiers distantes de 10km reçoivent un signal de détresse d'un campeur. Leurs équipements électroniques leur permettent de déterminer que le campeur se situe à un angle de 71° de la première station et de 100° de la seconde, chaque angle ayant un côté commun soit la ligne reliant les deux stations. Quelle station est la plus rapprochée du campeur.



L'enseignant résout ce deuxième problème avec l'aide des élèves.

$\angle A = 71°$, $\angle B = 100°$ et $\angle C = 9°$

AB = 10 km (c=10 km)

BC = a
AC = b

- $\frac{c}{\text{Sin } C} = \frac{a}{\text{Sin } A}$

$\Leftrightarrow \frac{10}{\text{Sin } 9°} = \frac{a}{\text{Sin } 71°}$

$\Leftrightarrow$ on trouve $a \approx 60{,}5$km

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

- $\frac{c}{\text{Sin C}} = \frac{b}{\text{Sin B}}$

  $\mathcal{E}\rightarrow \frac{10}{\text{Sin } 9°} = \frac{b}{\text{Sin } 100°}$

  $\mathcal{E}\rightarrow$ on trouve $b \approx 62{,}9\text{km}$

Réponse: le poste B est le plus rapproché du campeur.

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

1) Soit un $\triangle ABC$ où $a = 12$
   $\angle B = 60°$
   $\angle c = 45°$
   Trouve la mesure de $\angle A$, b et c.

2) Soit un $\triangle ABC$ où $b = 1{,}257\text{m}$
   $\angle A = 73°14'$
   $\angle B = 38°30'$
   Trouve la mesure de $\angle c$, a et c.

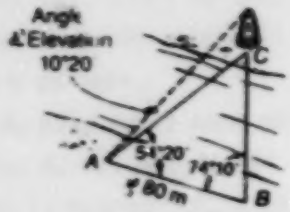
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

3) Soit un ABC quelconque,

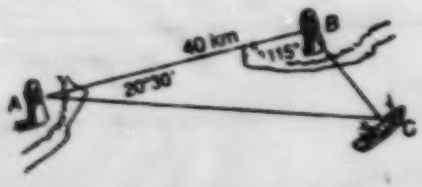
$\angle B = 45°$, $c = 2\sqrt{3}$ et $\angle C = 72°$

Trouve la mesure de $\angle A$, b et a.

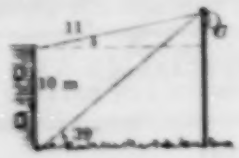
4) Un arbre se situe au point C sur la rive opposée de la rivière, point A. Une ligne $\overline{AB}$ est établie sur un côté de la rivière. Celle-ci mesure 80 m. La mesure de $\angle BAC$ est 54°20' et celle de $\angle CBA$ est 74°10'. L'angle d'élévation de A vers le sommet de l'arbre est de 10°20'. Trouve la hauteur de l'arbre.



5) Deux phares A et B sont distant de 40 km. Chacun a un contact visuel avec un cargo au point C. Trouve à quelle distance des points A et B se trouve le cargo.



OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)	PAGE: 49

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	6) Une molécule d'eau est formée de deux atomes d'hydrogène et d'un atome d'oxygène. La distance entre le noyau de chaque atome d'hydrogène (H) et le noyau de l'atome d'hydrogène (O) est de 9,58 E - 9 cm; l'angle θ est égal à 104,8°. Quelle est la distance entre les deux noyaux des atomes d'hydrogène? 7) A partir du toit d'une maison, l'angle d'élévation d'un mât est de 11°. La maison est de 10 m de haut. A partir du pied de la même maison, l'angle d'élévation du mât est de 39°. Quelle est la hauteur de ce mât? 

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

8) Anne veut connaître la distance entre les points A et B situés sur la rive opposée. Elle a calculé que

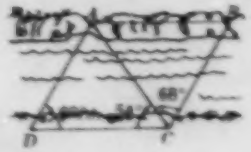
CD = 91m

∠ADC = 60°

∠ACD = 54°

∠ACB = 68°

Quelle est la distance entre A et B, sachant que AB // DC?

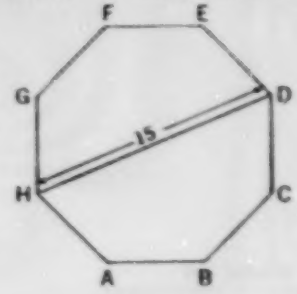


9) Sachant que l'angle d'élévation de l'arbre en C est de 12° par rapport au point A, quelle est la hauteur de cet arbre?

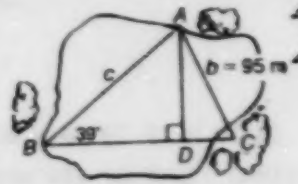
OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)	PAGE: 51

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

10) Quelle est la longueur d'un côté d'un octagone régulier si la diagonale mesure 15 m de long?



11) Quelle est la largeur de ce lac entre les points A et B, sachant que $\overline{AC}$ = 95 m

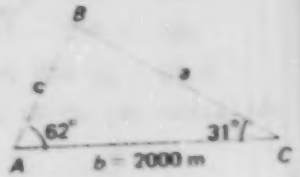


12) Un édifice de 60 m de haut est au sommet d'un côté. Un arpenteur est en bas de cette côte et il observe que l'angle d'élévation du sommet de l'édifice est de 42° et l'angle d'élévation du pied de l'édifice est de 18°, A quelle distance du pied de l'édifice est situé l'arpenteur?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

EXERCICES ET REFERENCES

13) Un ballon météorologique B est directement situé au-dessus d'une piste d'atterissage qui s'étend de A à C; cette piste mesure 2 000 m de longueur. En A, l'angle d'élévation est de 62° et en C, l'angle d'élévation est de 31°. Quelle est la distance entre A et B, et C et B?



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

UN CAS AMBIGUE

Soit un $\triangle ABC$ quelconque

dans lequel

$$\angle B = 45°$$
$$c = 2\sqrt{3}\ cm$$
$$b = 2\sqrt{2}\ cm$$

L'enseignant demande aux élèves de construire ce triangle.
Les élèves devraient trouver deux possibilités.

Figure 1

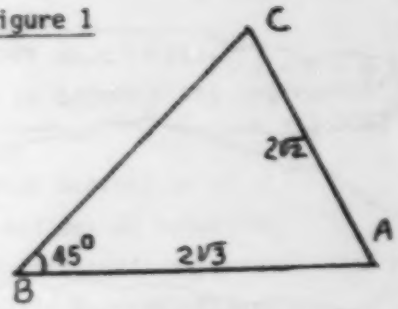
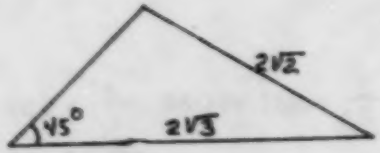


Figure 2



Ne connaissant qu'un angle, et l'énoncé ne spécifie pas si c'est un triangle acutangle (3 angles aigus) ou si c'est un triangle obtusangle (un angle obtus), il me faut considérer les deux cas.

$$\frac{c}{\text{Sin } C} = \frac{b}{\text{Sin } B} \quad \text{et} \quad \frac{2\sqrt{3}}{\text{Sin } C} = \frac{2\sqrt{2}}{\text{sin } 45°}$$

$\text{Sin } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

on devrait trouver $\text{Sin}C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

Si le triangle est acutangle alors $0° < c < 90°$

$\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ se retrouve à 60° ou 120°

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Si le triangle est obtusangle, alors $90° < c < 180°$

- Si le triangle est acutangle: *$\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $< c = 60°$*

On a: $< B = 45°$, $< C = 60°$ et $< A = 75°$

Il ne reste qu'à trouver le côté a. (voir figure 1)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{et} \quad \frac{a}{\sin 75°} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60°}$$

$$\frac{a}{0,9659} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} \qquad a = \frac{2\sqrt{3} \times 0,9659}{\sqrt{3}/2}$$

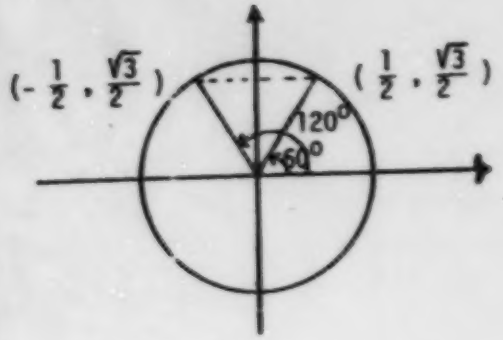
$$a = \frac{2\sqrt{3} \times 0,9659 \times 2}{\sqrt{3}}$$

$$a = 2 \times 0,9659 \times 2$$

$$a = 3,8636 \text{cm}$$

c'est la première valeur possible de a!

EXERCICES ET REFERENCES



ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

- Si le triangle est obtusangle

Sin C = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et ∠C = 120°

On a: ∠B = 45°, ∠c = 120° et ∠A = 15°

Il ne reste qu'à trouver le côté a. (voir figure 2)

$$\frac{a}{\text{Sin A}} = \frac{b}{\text{Sin B}} \text{ et } \frac{a}{\text{Sin } 15^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\text{Sin } 60^\circ}$$

$$\frac{a}{0{,}2588} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} \qquad a = \frac{2\sqrt{3} \times 0{,}2588}{\sqrt{3}/2}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3} \times 0{,}2588 \times 2}{\sqrt{3}}$$

$$a = 2 \times 0{,}2588 \times 2$$

$$a = 1{,}0352 \text{ cm}$$

Il peut arriver qu'il n'y ait pas de solution; cette alternative pourrait être discutée avec les élèves

EXERCICES ET REFERENCES

Exercices

1) Soit un △ABC où a = 200,

∠B = 72° et ∠C = 48°

Quelle est la longueur du côté c?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

2)

Calcule les éléments d'un triangle si:

a) $a = 14$, $b = 10$ et $\angle A$ 30°.

b) $a = 230$, $b = 350$ et $\angle A = 45^{\circ}$.

c) $a = 4{,}5$, $b = 5{,}0$ et $\angle A = 60^{\circ}$.

d) $a = 64$, $b = 28$ et $\angle B = 30^{\circ}$.

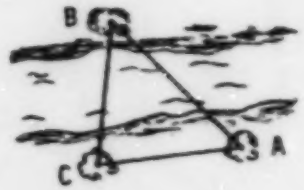
e) $c = 322$, $b = 161$ et $\angle B = 30^{\circ}$.

f) $a = 5$, $c = 7$ et $\angle C = 73^{\circ}\ 15'$

g) $b = 4$, $\angle A = 105^{\circ}$ et $\angle C = 60^{\circ}$

3) Un poteau télégraphique projette une ombre de 4 m lorsque le soleil se trouve à 63° au-dessus de l'horizon. Le poteau fait un un angle de 15° avec la verticale et est incliné dans la direction du soleil. Calcule sa longueur.

4) On voit, d'un navire, un point A au sommet d'une colline, dans une direction faisant avec l'horizontale un angle de 21°. Cet angle devient 47° après que le navire se soit approché de 250 m en direction de la base de la falaise. Quelle est la hauteur de la falaise?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	5) Du haut d'un édifice de 90 m de hauteur, l'angle de dépression d'une automobile est 49°10'. A quelle distance du pied de l'édifice se trouve cette automobile? 6) Du sommet d'une tour, l'angle de dépression d'un objet situé à 750 m de la base de cette tour et sur le même plan horizontal, est 15°. Trouve la hauteur de la tour. 7) Du haut d'un phare, un observateur voit un bateau sous un angle de 4°30'; si la hauteur du phare est de 116 m à quelle distance de la base du phare se trouve le bateau? 8) Pour mesurer la distance entre deux arbres C et B séparés par un cours d'eau, on mesure une distance $\overline{CA}$ = 100 m (figure ci-dessous)° C = 81° et ° A = 50°. Trouve m $\overline{BC}$. 

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	9) Dans un triangle ABC, peut-on avoir: b = 25, c = 12 et l'angle opposé à c égal à 31° 30'? 10) Deux points A et C sont situés face à face de chaque côté d'un étang, selon le dessin ci-dessous. $\angle C = 30°$, AC = 25 m et AB = 18 m. Quelle doit être la longueur de BC pour le point B ne soit pas situé dans l'eau?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 6 : LA RÉSOLUTION DES TRIANGLES QUELCONQUES

Supposons que l'on connaisse
LA MESURE DES TROIS CÔTÉS

Une autre démonstration des Pythagoriciens!

. Dans le triangle BDC, on a:

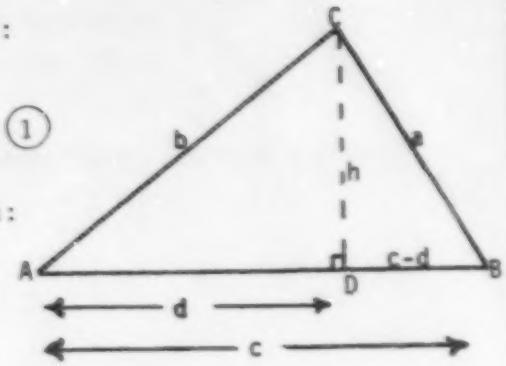
$a^2 = h^2 + (c-d)^2$

$a^2 = h^2 + c^2 - 2cd + d^2$ (1)

. Dans le triangle ADC, on a:

$b^2 = h^2 + d^2$

$h^2 = b^2 - d^2$ (2)



. De (1) et (2), on obtient:

$a^2 = b^2 - d^2 + c^2 - 2cd + d^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$

$\downarrow$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

on sait que dans le triangle ADC,
$\cos A = \frac{d}{b}$
$d = b \cos A$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

Cette loi s'énonce comme suit:

> Le carré de la longueur d'un côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, moins le double produit des longueurs des deux autres côtés par le cosinus de l'angle compris entre ces deux côtés.

L'enseignant peut démontrer, de la même façon, les deux autres relations.

Il serait peut-être intéressant de demander aux élèves de les démontrer eux-mêmes en équipes de 2 ou 3!

On obtient alors:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

C'est la loi du cosinus

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

EXEMPLE 1

Soit ABC, un triangle quelconque dont les côtés mesurant respectivement 9cm, 12cm et 20cm. Quelle est la mesure de $\angle c$?

$a = 9cm$

$b = 12cm$

$c = 20cm$

Il faut choisir la bonne relation!

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\cos C = \frac{9^2 + 12^2 - 20^2}{2 \times 9 \times 12} = \frac{81 + 144 - 400}{216}$$

$$\cos C = \frac{-175}{216} \simeq -0{,}8102$$

0,8102 [INV] [COS] $\simeq 35{,}9°$

Comme le cosinus de C est négatif, il est donc compris entre 90° et 180°

C'est donc un angle obtus

Insister sur cette application dont la compréhension est difficile

On se rappelle que $\cos(180°-\theta) = -(\cos \theta)$

$\cos(180°-C) = -(\cos c)$

$= -(-0{,}8102)$

$\simeq 0{,}8102$

La lecture dans la table nous donne 35,9° ou 35°54'

ainsi: $180° - 35{,}9 = 144{,}1°$ ou $144°6'$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

EXEMPLE 2

Soit ABC, un triangle quelconque dont $\angle A = 60°$

$b = 3cm$

$c = 4cm$

Dans un tel cas, l'angle connu est situé entre les deux côtés connus. On ne peut donc pas utiliser la loi des sinus!!!

- On calcule d'abord la mesure du 3ème côté:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ CosA$

$a^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4\ Cos\ 60°$

$a^2 = 9 + 16 - 24 \times 1/2$

$a^2 = 9 + 16 - 12$

$a^2 = 13$

$a = \sqrt{13}$

- On calcule ensuite la mesure des autres angles:

$$\frac{a}{Sin\ A} = \frac{b}{Sin\ B} \rightarrow \frac{\sqrt{13}}{Sin\ 60°} = \frac{3}{Sin\ B}$$

$$Sin\ B = \frac{3 \times Sin\ 60°}{\sqrt{13}}$$

$$Sin\ B = \frac{3 \times \sqrt{3}/2}{\sqrt{13}}$$

Dans la table on trouve $\angle B \simeq 46,1°$

$$Sin\ B = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} \simeq 0,7206$$

0,7206 [INV] [SIN] $\simeq 46,1°$

Donc $\angle C = 73,9°$

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE

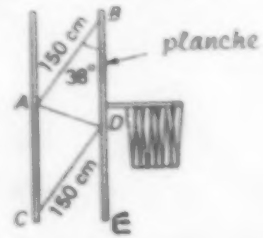
EXEMPLE 3

Les points A et B sont situés de chaque côté d'un étang et le point C est situé à l'une des extrémités de l'étang. Si $\angle C = 30°$, AC = 25m et BC = 30m, quelle est la distance entre les points A et B?

L'enseignant résout ce problème avec les élèves.

EXEMPLE 4

Les supports pour une planche de basketball sont parallèles et forment un angle de 38° avec cette planche (BE). Si la distance de B à D est 140cm, et si les supports (AB ou CD) mesurent 150cm de long, quel est alors la longueur du support intermédiaire AD?



L'enseignant résout ce problème avec les élèves.

EXERCICES ET REFERENCES

Mettre ces deux problèmes sur un grand carton ou sur une acétate afin de favoriser une meilleure discussion avec les élèves

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

EXERCICES

1) Si a = 7cm, b = 5cm et c = 8cm, quelle est la valeur des angles A, B et C?

2) Les distances entre trois villes A, B et C sont les suivantes:
A et B sont distantes l'une de l'autre de 120 km, B et C de 140 km et C et A de 160km.

Deux automobiles partent de B et se dirigent vers A, l'autre vers C. Trouve l'angle formé par les directions de leur déplacement.

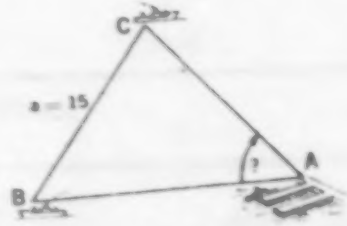
3) Calcule les éléments d'un triangle si:

a) a = 3	b = 2	$\angle C = 60°$
b) b = 8	c = 2	$\angle A = 30°$
c) b = 7	c = $\sqrt{2}$	$\angle A = 145°$
d) a = 2	c = 3	$\angle B = 30°$
e) a = 10	b = 6	$\angle C = 103°10'$

4) Si trois côtés sont donnés, à quelle condition forment-ils un triangle?

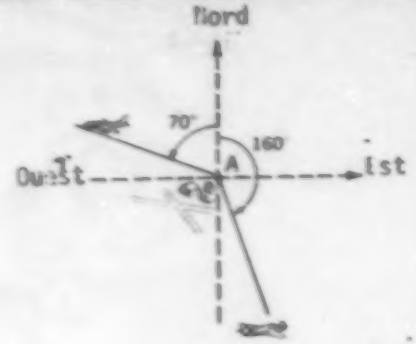
5) Trouve s'il y a lieu, les angles d'un triangle dont les côtés mesurent:
a) 5, 6, 7 b) 4, 5, 7 c) 1, 1, 10

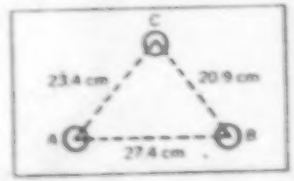
ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	6) Deux côtés d'un triangle mesurent respectivement 5cm et 10cm. L'angle compris entre ces deux côtés mesure 120°. Trouve la mesure du troisième côté. 7) Dans un triangle, un angle dont la mesure en degrés est 60 est compris entre les côtés dont les mesures respectives en cm sont 15 et 20. Calcule la mesure des deux autres angles. 8) Les mesures en cm des côtés $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ d'un parallélogramme ABCD sont respectivement 15 et 12 et la mesure en degrés de l'angle B est 70. Trouve la longueur de chaque diagonale. 9) Les mesures en cm des côtés $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ d'un parallélogramme ABCD sont respectivement 12 et 10 et celle de la diagonale $\overline{AC}$ est 18: Trouve la mesure de l'angle B et la longueur de la diagonale $\overline{BD}$.

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	10) Deux trains partent ensemble d'une même gare et vont dans deux directions faisant un angle dont la mesure en degrés est 65. Si l'un fait 40 km à l'heure et l'autre 50 km à quelle distance seront-ils l'un de l'autre au bout de 3 heures?
	11) Quelle est la longueur d'un côté de l'octogone régulier suivant si la diagonale mesure 15 cm?
	12) Un bateau est à 70 milles d'un émetteur radio et à 130 milles d'un autre. La mesure de l'angle entre les deux signaux est de 130°. Quelle distance sépare les deux émetteurs?
	13) Deux navires quittent le port A en même temps. Le premier (B) voyage à la vitesse de 16 km/h et le second (c) voyage à la vitesse de 12 km/h. Quelle était la mesure de l'angle entre les deux bateaux à leur départ du port, s'ils sont actuellement distants de 25 km?

OBJECTIF INTERMEDIAIRE (2.3.17)

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES



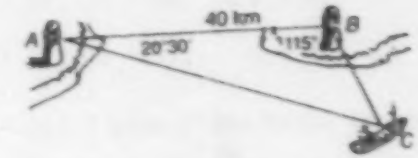


14) Deux avions 747 quittent un aéroport en même temps. La direction du 1er est de 160° est et la direction du second est de 70° ouest.
Si le premier voyage à 800 km/h et si le second voyage à 1000 km/h quelle sera la distance entre les deux avions au bout de 4 heures?

15) Les pattes d'une chaise pliante ont les longueurs montrées sur le dessin.
Si CD = 30 cm, quelle est alors la profondeur (AB) du siège?

16) Montre que si $\angle C = 180°$, alors la loi des cosinus implique que $c = a + b$

17) Un ouvrier doit percer trois trous en A, B et C, dans une plaque d'acier.
Si a = 20,9cm, b = 23,4 cm et c = 27,4 cm quelle est alors la mesure de $\angle ABC$?

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES
	18) Deux phares A et B sont distants de 40 km. Chacun d'eux a un contact visuel avec un cargo au point C. A quelle distance du phare A est situé le cargo? 

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

ACTIVITE 7: L'AIRE DES TRIANGLES QUELCONQUES

On sait que:

$$A = \frac{h \cdot c}{2}$$

Or: $\text{Sin } A = \frac{h}{b}$

et $h = b \cdot \text{Sin } A$

Ainsi: $A = \frac{bc \text{ Sin } A}{2}$

L'enseignant peut demander aux élèves de démontrer les deux autres relations!

$$A = \frac{bc \text{ Sin } A}{2}$$

$$A = \frac{ac \text{ Sin } B}{2}$$

$$A = \frac{ab \text{ Sin } C}{2}$$

EXEMPLE Quelle est l'aire du triangle quelconque ABC, dont $\angle B = 45°$, $a = 12\text{cm}$ et $c = 14\text{cm}$?

L'enseignant résout ce problème avec les élèves

ACTIVITES D'APPRENTISSAGE	EXERCICES ET REFERENCES

EXERCICES

1) Calcule l'aire de chacun des triangles suivants:

a) b = 10, c = 12, $\angle A = 30°$

b) a = 5, b = 7, $\angle C = 60°$

c) a = 18, c = 20, $\angle B = 45°$

d) a = 12, b = 13, c = 14

2) Quelle est l'aire d'une tuile de céramique triangulaire, sachant que les trois côtés de cette tuile mesurent respectivement 15 cm, 25 cm, et 30 cm?

3) Lequel des triangles suivants possède la plus grande aire?

a) a = 3, b = 4, c = 6

b) a = 2,5, b = 5, c = 6

c) a = 4 b = 4, c = 7

4) Montre que l'aire A d'un triangle ABC est donnée par la formule:

$$A = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\text{Sin } B \cdot \text{Sin } C}{\text{Sin } A}$$

Annexe 1

TABLE DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Sinus (de haut en bas)

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9		
0°	0,0000	0,0017	0,0035	0,0052	0,0070	0,0087	0,0105	0,0122	0,0140	0,0157	0,0175	89°
1°	0,0175	0,0192	0,0209	0,0227	0,0244	0,0262	0,0279	0,0297	0,0314	0,0332	0,0349	88°
2°	0,0349	0,0366	0,0384	0,0401	0,0419	0,0436	0,0454	0,0471	0,0488	0,0506	0,0523	87°
3°	0,0523	0,0541	0,0558	0,0576	0,0593	0,0610	0,0628	0,0645	0,0663	0,0680	0,0698	86°
4°	0,0698	0,0715	0,0732	0,0750	0,0767	0,0785	0,0802	0,0819	0,0837	0,0854	0,0872	85°
5°	0,0872	0,0889	0,0906	0,0924	0,0941	0,0958	0,0976	0,0993	0,1011	0,1028	0,1045	84°
6°	0,1045	0,1063	0,1080	0,1097	0,1115	0,1132	0,1149	0,1167	0,1184	0,1201	0,1219	83°
7°	0,1219	0,1236	0,1253	0,1271	0,1288	0,1305	0,1323	0,1340	0,1357	0,1374	0,1392	82°
8°	0,1392	0,1409	0,1426	0,1444	0,1461	0,1478	0,1495	0,1513	0,1530	0,1547	0,1564	81°
9°	0,1564	0,1582	0,1599	0,1616	0,1633	0,1650	0,1668	0,1685	0,1702	0,1719	0,1736	80°
10°	0,1736	0,1754	0,1771	0,1788	0,1805	0,1822	0,1840	0,1857	0,1874	0,1891	0,1908	79°
11°	0,1908	0,1925	0,1942	0,1959	0,1977	0,1994	0,2011	0,2028	0,2045	0,2062	0,2079	78°
12°	0,2079	0,2096	0,2113	0,2130	0,2147	0,2164	0,2181	0,2198	0,2115	0,2233	0,2250	77°
13°	0,2250	0,2267	0,2284	0,2300	0,2317	0,2334	0,2351	0,2368	0,2385	0,2402	0,2419	76°
14°	0,2419	0,2436	0,2453	0,2470	0,2487	0,2504	0,2521	0,2538	0,2554	0,2571	0,2588	75°
15°	0,2588	0,2605	0,2622	0,2639	0,2656	0,2672	0,2689	0,2706	0,2723	0,2740	0,2756	74°
16°	0,2756	0,2773	0,2790	0,2807	0,2823	0,2840	0,2857	0,2874	0,2890	0,2907	0,2924	73°
17°	0,2924	0,2940	0,2957	0,2974	0,2990	0,3007	0,3024	0,3040	0,3057	0,3074	0,3090	72°
18°	0,3090	0,3107	0,3123	0,3140	0,3156	0,3173	0,3190	0,3206	0,3223	0,3239	0,3256	71°
19°	0,3256	0,3272	0,3289	0,3305	0,3322	0,3338	0,3355	0,3371	0,3387	0,3404	0,3420	70°
20°	0,3420	0,3437	0,3453	0,3469	0,3486	0,3502	0,3518	0,3535	0,3551	0,3567	0,3584	69°
21°	0,3584	0,3600	0,3616	0,3633	0,3649	0,3665	0,3681	0,3697	0,3714	0,3730	0,3746	68°
22°	0,3746	0,3762	0,3778	0,3795	0,3811	0,3827	0,3843	0,3859	0,3875	0,3891	0,3907	67°
23°	0,3907	0,3923	0,3939	0,3955	0,3971	0,3987	0,4003	0,4019	0,4035	0,4051	0,4067	66°
24°	0,4067	0,4083	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4163	0,4179	0,4195	0,4210	0,4226	65°
25°	0,4226	0,4242	0,4258	0,4274	0,4289	0,4305	0,4321	0,4337	0,4352	0,4368	0,4384	64°
26°	0,4384	0,4399	0,4415	0,4431	0,4446	0,4462	0,4478	0,4493	0,4509	0,4524	0,4540	63°
27°	0,4540	0,4555	0,4571	0,4586	0,4602	0,4617	0,4633	0,4648	0,4664	0,4679	0,4695	62°
28°	0,4695	0,4710	0,4726	0,4741	0,4756	0,4772	0,4787	0,4802	0,4818	0,4833	0,4848	61°
29°	0,4848	0,4863	0,4879	0,4894	0,4909	0,4924	0,4939	0,4955	0,4970	0,4985	5,000	60°
30°	0,5000	0,5015	0,5030	0,5045	0,5060	0,5075	0,5090	0,5105	0,5120	0,5135	0,5150	59°
31°	0,5150	0,5165	0,5180	0,5195	0,5210	0,5225	0,5240	0,5255	0,5270	0,5284	0,5299	58°
32°	0,5299	0,5314	0,5329	0,5344	0,5358	0,5373	0,5388	0,5402	0,5417	0,5432	0,5446	57°
33°	0,5446	0,5461	0,5476	0,5490	0,5505	0,5519	0,5534	0,5548	0,5563	0,5577	0,5592	56°
34°	0,5592	0,5606	0,5621	0,5635	0,5650	0,5664	0,5678	0,5693	0,5707	0,5721	0,5736	55°
35°	0,5736	0,5750	0,5764	0,5779	0,5793	0,5807	0,5821	0,5835	0,5850	0,5864	0,5878	54°
36°	0,5878	0,5892	0,5906	0,5920	0,5934	0,5948	0,5962	0,5976	0,5990	0,6004	0,6018	53°
37°	0,6018	0,6032	0,6046	0,6060	0,6074	0,6088	0,6101	0,6115	0,6129	0,6143	0,6157	52°
38°	0,6157	0,6170	0,6184	0,6198	0,6211	0,6225	0,6239	0,6252	0,6266	0,6280	0,6293	51°
39°	0,6293	0,6307	0,6320	0,6334	0,6347	0,6361	0,6374	0,6388	0,6401	0,6414	0,6428	50°
40°	0,6428	0,6441	0,6455	0,6468	0,6481	0,6494	0,6508	0,6521	0,6534	0,6547	0,6561	49°
41°	0,6561	0,6574	0,6587	0,6600	0,6613	0,6626	0,6639	0,6652	0,6665	0,6678	0,6691	48°
42°	0,6691	0,6704	0,6717	0,6730	0,6743	0,6756	0,6769	0,6782	0,6794	0,6807	0,6820	47°
43°	0,6820	0,6833	0,6845	0,6858	0,6871	0,6884	0,6896	0,6909	0,6921	0,6934	0,6947	46°
44°	0,6947	0,6959	0,6972	0,6984	0,6997	0,7009	0,7022	0,7034	0,7046	0,7059	0,7071	45°
		0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0, 0	

Cosinus (de bas en haut)

Annexe 2

TABLE DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

Sinus (de haut en bas)

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9		
45°	0,7071	0,7083	0,7096	0,7108	0,7120	0,7133	0,7145	0,7157	0,7169	0,7181	0,7193	44°
46°	0,7193	0,7206	0,7218	0,7230	0,7242	0,7254	0,7266	0,7278	0,7290	0,7302	0,7314	43°
47°	0,7314	0,7325	0,7337	0,7349	0,7361	0,7373	0,7385	0,7396	0,7408	0,7420	0,7431	42°
48°	0,7431	0,7443	0,7455	0,7466	0,7478	0,7490	0,7501	0,7513	0,7524	0,7536	0,7547	41°
49°	0,7547	0,7559	0,7570	0,7581	0,7593	0,7604	0,7615	0,7627	0,7638	0,7649	0,7660	40°
50°	0,7660	0,7672	0,7683	0,7694	0,7705	0,7716	0,7727	0,7738	0,7749	0,7760	0,7771	39°
51°	0,7771	0,7782	0,7793	0,7804	0,7815	0,7826	0,7837	0,7848	0,7859	0,7869	0,7880	38°
52°	0,7880	0,7891	0,7902	0,7912	0,7923	0,7934	0,7944	0,7955	0,7965	0,7976	0,7986	37°
53°	0,7986	0,7997	0,8007	0,8018	0,8028	0,8039	0,8049	0,8059	0,8070	0,8080	0,8090	36°
54°	0,8090	0,8100	0,8111	0,8121	0,8131	0,8141	0,8151	0,8161	0,8171	0,8181	0,8192	35°
55°	0,8192	0,8202	0,8211	0,8221	0,8231	0,8241	0,8251	0,8261	0,8271	0,8281	0,8290	34°
56°	0,8290	0,8300	0,8310	0,8320	0,8329	0,8339	0,8348	0,8358	0,8368	0,8377	0,8387	33°
57°	0,8387	0,8396	0,8406	0,8415	0,8425	0,8434	0,8443	0,8453	0,8462	0,8471	0,8480	32°
58°	0,8480	0,8490	0,8499	0,8508	0,8517	0,8526	0,8536	0,8545	0,8554	0,8563	0,8572	31°
59°	0,8572	0,8581	0,8590	0,8599	0,8607	0,8616	0,8625	0,8634	0,8643	0,8652	0,8660	30°
60°	0,8660	0,8669	0,8678	0,8686	0,8695	0,8704	0,8712	0,8721	0,8729	0,8738	0,8746	29°
61°	0,8746	0,8755	0,8763	0,8771	0,8780	0,8788	0,8796	0,8805	0,8813	0,8821	0,8829	28°
62°	0,8829	0,8838	0,8846	0,8854	0,8862	0,8870	0,8878	0,8886	0,8894	0,8902	0,8910	27°
63°	0,8910	0,8918	0,8926	0,8934	0,8942	0,8949	0,8957	0,8965	0,8973	0,8980	0,8988	26°
64°	0,8988	0,8996	0,9003	0,9011	0,9018	0,9026	0,9033	0,9041	0,9048	0,9056	0,9063	25°
65°	0,9063	0,9070	0,9078	0,9085	0,9092	0,9100	0,9107	0,9114	0,9121	0,9128	0,9135	24°
66°	0,9135	0,9143	0,9150	0,9157	0,9164	0,9171	0,9178	0,9184	0,9191	0,9198	0,9205	23°
67°	0,9205	0,9212	0,9219	0,9225	0,9232	0,9239	0,9245	0,9252	0,9259	0,9265	0,9272	22°
68°	0,9272	0,9278	0,9285	0,9291	0,9298	0,9304	0,9311	0,9317	0,9323	0,9330	0,9336	21°
69°	0,9336	0,9342	0,9348	0,9354	0,9361	0,9367	0,9373	0,9379	0,9385	0,9391	0,9397	20°
70°	0,9397	0,9403	0,9409	0,9415	0,9421	0,9426	0,9432	0,9438	0,9444	0,9449	0,9455	19°
71°	0,9455	0,9461	0,9466	0,9472	0,9478	0,9483	0,9489	0,9494	0,9500	0,9505	0,9511	18°
72°	0,9511	0,9516	0,9521	0,9527	0,9532	0,9537	0,9542	0,9548	0,9553	0,9558	0,9563	17°
73°	0,9563	0,9568	0,9573	0,9578	0,9583	0,9588	0,9593	0,9598	0,9603	0,9608	0,9613	16°
74°	0,9613	0,9617	0,9622	0,9627	0,9632	0,9636	0,9641	0,9646	0,9650	0,9655	0,9659	15°
75°	0,9659	0,9664	0,9668	0,9673	0,9677	0,9681	0,9686	0,9690	0,9694	0,9699	0,9703	14°
76°	0,9703	0,9707	0,9711	0,9715	0,9720	0,9724	0,9728	0,9732	0,9736	0,9740	0,9744	13°
77°	0,9744	0,9748	0,9751	0,9755	0,9759	0,9763	0,9767	0,9770	0,9774	0,9778	0,9781	12°
78°	0,9781	0,9785	0,9789	0,9792	0,9796	0,9799	0,9803	0,9806	0,9810	0,9813	0,9816	11°
79°	0,8916	0,9820	0,9823	0,9826	0,9829	0,9833	0,9836	0,9839	0,9842	0,9845	0,9848	10°
80°	0,9848	0,9851	0,9854	0,9857	0,9860	0,9863	0,9866	0,9869	0,9871	0,9874	0,9877	9°
81°	0,9877	0,9880	0,9882	0,9885	0,9888	0,9890	0,9893	0,9895	0,9898	0,9900	0,9903	8°
82°	0,9903	0,9905	0,9907	0,9910	0,9912	0,9914	0,9917	0,9919	0,9921	0,9923	0,9925	7°
83°	0,9925	0,9928	0,9930	0,9932	0,9934	0,9936	0,9938	0,9940	0,9942	0,9943	0,9945	6°
84°	0,9945	0,9947	0,9949	0,9951	0,9952	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9962	5°
85°	0,9962	0,9963	0,9965	0,9966	0,9968	0,9969	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974	0,9976	4°
86°	0,9976	0,9977	0,9978	0,9979	0,9980	0,9981	0,9982	0,9983	0,9984	0,9985	0,9986	3°
87°	0,9986	0,9987	0,9988	0,9989	0,9990	0,9990	0,9991	0,9992	0,9993	0,9993	0,9994	2°
88°	0,9994	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	1°
89°	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0°
		0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0	

Cosinus (de bas en haut)

Annexe 3

TABLE DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Tangente (lire en descendant)

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9		
0°	0,000 0	0,001 7	0,003 5	0,005 2	0,007 0	0,008 7	0,010 5	0,012 2	0,014 0	0,015 7	0,017 5	89°
1°	0,017 5	0,019 2	0,023 9	0,022 7	0,024 4	0,026 2	0,027 9	0,029 7	0,031 4	0,033 2	0,034 9	88°
2°	0,034 9	0,036 7	0,038 4	0,040 2	0,041 9	0,043 7	0,045 4	0,047 2	0,048 9	0,050 7	0,052 4	87°
3°	0,052 4	0,054 2	0,055 9	0,057 7	0,059 4	0,061 2	0,062 9	0,064 7	0,066 4	0,068 2	0,069 9	86°
4°	0,069 9	0,071 7	0,073 4	0,075 2	0,076 9	0,078 7	0,080 5	0,082 2	0,084 0	0,085 7	0,087 5	85°
5°	0,087 5	0,089 2	0,091 0	0,092 8	0,094 5	0,096 3	0,098 1	0,099 8	0,101 6	0,103 3	0,105 1	84°
6°	0,105 1	0,106 9	0,108 6	0,110 4	0,112 1	0,113 9	0,115 7	0,117 5	0,119 2	0,121 0	0,122 8	83°
7°	0,122 8	0,124 6	0,126 3	0,128 1	0,129 9	0,131 7	0,133 4	0,135 2	0,137 0	0,138 8	0,140 5	82°
8°	0,140 5	0,142 3	0,144 1	0,145 9	0,147 7	0,149 5	0,151 2	0,153 0	0,154 8	0,156 6	0,158 4	81°
9°	0,158 4	0,160 2	0,162 0	0,163 8	0,165 5	0,167 3	0,169 1	0,170 9	0,172 7	0,174 5	0,176 3	80°
10°	0,176 3	0,178 1	0,179 9	0,181 7	0,183 5	0,185 3	0,187 1	0,189 0	0,190 8	0,192 6	0,194 4	79°
11°	0,194 4	0,196 2	0,198 0	0,199 8	0,201 6	0,203 5	0,205 3	0,207 1	0,208 9	0,210 7	0,212 6	78°
12°	0,212 6	0,214 4	0,216 2	0,218 0	0,219 9	0,221 7	0,223 5	0,225 4	0,227 2	0,229 0	0,230 9	77°
13°	0,230 9	0,232 7	0,234 5	0,236 4	0,238 2	0,240 1	0,241 9	0,243 8	0,245 6	0,247 5	0,249 3	76°
14°	0,249 3	0,251 2	0,253 0	0,254 9	0,256 8	0,258 6	0,260 5	0,262 3	0,264 2	0,266 1	0,267 9	75°
15°	0,267 9	0,269 8	0,271 7	0,273 6	0,275 4	0,277 3	0,279 2	0,281 1	0,283 0	0,284 9	0,286 7	74°
16°	0,286 7	0,288 6	0,290 5	0,292 4	0,294 3	0,296 2	0,298 1	0,300 0	0,301 9	0,303 8	0,305 7	73°
17°	0,305 7	0,307 6	0,309 6	0,311 5	0,313 4	0,315 3	0,317 2	0,311 9	0,321 1	0,323 0	0,324 9	72°
18°	0,324 9	0,326 9	0,328 8	0,330 7	0,332 7	0,334 6	0,336 5	0,338 5	0,340 4	0,342 4	0,344 3	71°
19°	0,344 3	0,346 3	0,348 2	0,350 2	0,352 2	0,354 1	0,356 1	0,358 1	0,360 0	0,362 0	0,364 0	70°
20°	0,364 0	0,365 9	0,367 9	0,369 9	0,371 9	0,373 9	0,375 9	0,377 9	0,379 9	0,381 9	0,383 9	69°
21°	0,383 9	0,385 9	0,387 9	0,389 9	0,391 9	0,393 9	0,395 9	0,397 9	0,400 0	0,402 0	0,404 0	68°
22°	0,404 0	0,406 1	0,408 1	0,410 1	0,412 2	0,414 2	0,416 3	0,418 3	0,420 4	0,422 4	0,424 5	67°
23°	0,424 5	0,426 5	0,428 6	0,430 7	0,432 7	0,434 8	0,436 9	0,439 0	0,441 1	0,443 1	0,445 2	66°
24°	0,445 2	0,447 3	0,449 4	0,451 5	0,453 6	0,455 7	0,457 8	0,459 9	0,462 1	0,464 2	0,466 3	65°
25°	0,466 3	0,468 4	0,470 6	0,472 7	0,474 8	0,477 0	0,479 1	0,481 3	0,483 4	0,485 6	0,487 7	64°
26°	0,487 7	0,489 9	0,492 1	0,494 2	0,496 4	0,498 6	0,500 8	0,502 9	0,505 1	0,507 3	0,509 5	63°
27°	0,509 5	0,511 7	0,513 9	0,516 1	0,518 4	0,520 6	0,522 8	0,525 0	0,527 2	0,529 5	0,531 7	62°
28°	0,531 7	0,534 0	0,536 2	0,538 4	0,540 7	0,543 0	0,545 2	0,547 5	0,549 8	0,552 0	0,554 3	61°
29°	0,554 3	0,556 6	0,558 9	0,561 2	0,563 5	0,565 8	0,568 1	0,570 4	0,572 7	0,575 0	0,577 4	60°
30°	0,577 4	0,579 7	0,582 0	0,584 4	0,586 7	0,589 0	0,591 4	0,593 8	0,596 1	0,598 5	0,600 9	59°
31°	0,600 9	0,603 2	0,605 6	0,608 0	0,610 4	0,612 8	0,615 2	0,617 6	0,620 0	0,622 4	0,624 9	58°
32°	0,624 9	0,627 3	0,629 7	0,632 2	0,634 6	0,637 1	0,639 5	0,642 0	0,644 5	0,646 9	0,649 4	57°
33°	0,649 4	0,651 9	0,654 4	0,656 9	0,659 4	0,661 9	0,664 4	0,666 9	0,669 4	0,672 0	0,674 5	56°
34°	0,674 5	0,677 1	0,679 6	0,682 2	0,684 7	0,687 3	0,689 9	0,692 4	0,695 0	0,697 6	0,700 2	55°
35°	0,700 2	0,702 8	0,705 4	0,708 0	0,710 7	0,713 3	0,715 9	0,718 6	0,721 2	0,723 9	0,726 5	54°
36°	0,726 5	0,729 2	0,731 9	0,734 6	0,737 3	0,740 0	0,742 7	0,745 4	0,748 1	0,750 8	0,753 6	53°
37°	0,753 6	0,756 3	0,759 0	0,761 8	0,764 6	0,767 3	0,770 1	0,772 9	0,775 7	0,778 5	0,781 3	52°
38°	0,781 3	0,784 1	0,786 9	0,789 8	0,792 6	0,795 4	0,798 3	0,801 2	0,804 0	0,806 9	0,809 8	51°
39°	0,809 8	0,812 7	0,815 6	0,818 5	0,821 4	0,824 3	0,827 3	0,830 2	0,833 2	0,836 1	0,839 1	50°
40	0,839	0,842 1	0,845 1	0,848 1	0,851 1	0,854 1	0,857 1	0,860 1	0,863 2	0,866 2	0,869 3	49°
41	0,869	0,872 4	0,875 4	0,878 5	0,881 6	0,884 7	0,887 8	0,981 0	0,894 1	0,897 2	0,900 4	48°
42	0,900	0,903 6	0,906 7	0,909 9	0,913 1	0,916 3	0,919 5	0,922 8	0,926 0	0,929 3	0,932 5	47°
43°	0,932	0,935 8	0,939 1	0,942 4	0,945 7	0,949 0	0,952 3	0,955 6	0,959 0	0,962 3	0,965 7	46°
44°	0,965	0,969 1	0,972 5	0,975 9	0,979 3	0,982 7	0,986 1	0,989 6	0,993 0	0,996 5	1,000 0	45°
		0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0	

Cotangente (lire en montant)

Annexe 4

TABLE DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Tangente (lire en descendant)

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9		
45°	1,000	1,003	1,007	1,011	1,014	1,018	1,021	1,025	1,028	1,032	1,036	44°
46°	1,036	1,039	1,043	1,046	1,050	1,054	1,057	1,061	1,065	1,069	1,072	43°
47°	1,072	1,076	1,080	1,084	1,087	1,091	1,095	1,099	1,103	1,107	1,111	42°
48°	1,111	1,115	1,118	1,122	1,126	1,130	1,134	1,138	1,142	1,146	1,150	41°
49°	1,150	1,154	1,159	1,163	1,167	1,171	1,175	1,179	1,183	1,188	1,192	40°
50°	1,192	1,196	1,200	1,205	1,209	1,213	1,217	1,222	1,226	1,230	1,235	39°
51°	1,235	1,239	1,244	1,248	1,253	1,257	1,262	1,266	1,271	1,275	1,280	38°
52°	1,280	1,285	1,289	1,294	1,299	1,303	1,308	1,313	1,317	1,322	1,327	37°
53°	1,327	1,332	1,337	1,342	1,347	1,351	1,356	1,361	1,366	1,371	1,376	36°
54°	1,376	1,381	1,387	1,392	1,397	1,402	1,407	1,412	1,418	1,423	1,428	35°
55°	1,428	1,433	1,439	1,444	1,450	1,455	1,460	1,466	1,471	1,477	1,483	34°
56°	1,483	1,488	1,494	1,499	1,505	1,511	1,517	1,522	1,528	1,534	1,540	33°
57°	1,540	1,546	1,552	1,558	1,564	1,570	1,576	1,582	1,588	1,594	1,600	32°
58°	1,600	1,607	1,613	1,619	1,625	1,632	1,638	1,645	1,651	1,658	1,664	31°
59°	1,664	1,671	1,678	1,684	1,691	1,698	1,704	1,711	1,718	1,725	1,732	30°
60°	1,732	1,739	1,746	1,753	1,760	1,767	1,775	1,782	1,789	1,797	1,804	29°
61°	1,804	1,811	1,819	1,827	1,834	1,842	1,849	1,857	1,865	1,873	1,881	28°
62°	1,881	1,889	1,897	1,905	1,913	1,921	1,929	1,937	1,946	1,954	1,963	27°
63°	1,963	1,971	1,980	1,988	1,997	2,006	2,014	2,023	2,032	2,041	2,050	26°
64°	2,050	2,059	2,069	2,078	2,087	2,097	2,106	2,116	2,125	2,135	2,145	25°
65°	2,145	2,154	2,164	2,174	2,184	2,194	2,204	2,215	2,225	2,236	2,246	24°
66°	2,246	2,257	2,267	2,278	2,289	2,300	2,311	2,322	2,333	2,344	2,356	23°
67°	2,356	2,367	2,379	2,391	2,402	2,414	2,426	2,438	2,450	2,463	2,475	22°
68°	2,475	2,488	2,500	2,513	2,526	2,539	2,552	2,565	2,578	2,592	2,605	21°
69°	2,605	2,619	2,633	2,646	2,660	2,675	2,689	2,703	2,718	2,733	2,747	20°
70°	2,747	2,762	2,778	2,793	2,808	2,824	2,840	2,856	2,872	2,888	2,904	19°
71°	2,904	2,921	2,937	2,954	2,971	2,989	3,006	3,024	3,042	3,060	3,078	18°
72°	3,078	3,096	3,115	3,133	3,152	3,172	3,191	3,211	3,230	3,251	3,271	17°
73°	3,271	3,291	3,312	3,333	3,354	3,376	3,398	3,420	3,442	3,465	3,487	16°
74°	3,487	3,511	3,534	3,558	3,582	3,606	3,630	3,655	3,681	3,706	3,732	15°
75°	3,732	3,758	3,785	3,812	3,839	3,867	3,895	3,923	3,952	3,981	4,011	14°
76°	4,011	4,041	4,071	4,102	4,134	4,165	4,198	4,230	4,264	4,297	4,331	13°
77°	4,331	4,366	4,402	4,437	4,474	4,511	4,548	4,586	4,625	4,665	4,705	12°
78°	4,705	4,745	4,787	4,829	4,872	4,915	4,959	5,005	5,050	5,097	5,145	11°
79°	5,145	5,193	5,242	5,292	5,343	5,396	5,449	5,503	5,558	5,614	5,671	10°
80°	5,671	5,730	5,789	5,850	5,912	5,976	6,041	6,107	6,174	6,243	6,314	9°
81°	6,314	6,386	6,460	6,535	6,612	6,691	6,772	6,855	6,940	7,026	7,115	8°
82°	7,115	7,207	7,300	7,396	7,495	7,596	7,700	7,806	7,916	8,028	8,144	7°
83°	8,144	8,264	8,386	8,513	8,643	8,777	8,915	9,058	9,205	9,357	9,514	6°
84°	9,514	9,677	9,845	10,02	10,20	10,39	10,58	10,78	10,99	11,20	11,43	5°
85°	11,43	11,66	11,91	12,16	12,43	12,71	13,00	13,30	13,62	13,95	14,30	4°
86°	14,30	14,67	15,06	15,46	15,89	16,35	16,83	17,34	17,89	18,46	19,08	3°
87°	19,08	19,74	20,45	21,20	22,02	22,90	23,86	24,90	26,03	27,27	28,64	2°
88°	28,64	30,14	31,82	33,69	35,80	38,19	40,92	44,07	47,74	52,08	57,29	1°
89°	57,29	63,66	71,62	81,85	95,49	114,6	143,2	191,0	286,5	573,0	∞	0°
		0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0	

Cotangente (lire en montant)

Gouvernement du Québec
Ministère
de l'Éducation

8687-416